

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-41-52
УДК 519.17

Поступила: 04.06.2025г.
Сдана на рецензию: 04.06.2025г.
Подписана к печати: 09.05.2025г.

ВЕРШИННО-РАЗЛИЧАЮЩИЕ РЕБЕРНЫЕ РАСКРАСКИ ОДНОГО КЛАССА ГРАФОВ

П.А. Петросян^{1,2}, Т.К. Петросян²

*Ереванский государственный университет¹
Российско-Армянский (Славянский) университет²
petrosyan.petros@gmail.com, petrosyan.tigran@rau.am*

АННОТАЦИЯ

Для графа G функция $f: E(G) \rightarrow Z_{\geq 0}$ называется «реберной раскраской графа G ». Реберная раскраска f графа G называется «правильной», если для любых смежных ребер $e, e' \in E(G)$, $f(e) \neq f(e')$. Если f – правильная реберная раскраска графа G и $v \in V(G)$, то через $S(v, f)$ обозначается множество цветов ребер, инцидентных вершине v . Правильная раскраска f графа G называется «вершинно-различающей», если для любых различных вершин $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$. Наименьшее число цветов, необходимое для вершинно-различающей реберной раскраски графа G , называется «вершинно-различающим хроматическим индексом» и обозначается $\chi'_{vd}(G)$. В данной работе найдены точные значения вершинно-различающих индексов для одного класса графов.

Ключевые слова: реберная раскраска, вершинно-различающая реберная раскраска, вершинно-различающий хроматический индекс.

Введение

Все графы, рассматриваемые в данной работе, являются конечными неориентированными графами без кратных ребер и петель.

Неопределенные понятия и обозначения можно найти в [1]. Пусть G – неориентированный граф без кратных ребер и петель, $V(G)$ – множество вершин графа G , $E(G)$ – множество ребер графа G . Для графа G функция $f: E(G) \rightarrow Z_{\geq 0}$ называется правильной реберной раскраской графа G , если для любых смежных ребер $e, e' \in E(G)$, $f(e) \neq f(e')$. Минимальное количество цветов, необходимое для правильной раскраски графа G , называется *хроматическим индексом* и обозначается через $\chi'(G)$. Если f является правильной раскраской графа G и $v \in V(G)$, то через $S(v, f)$ обозначается множество цветов ребер, инцидентных вершине v , которая называется *спектром вершины v* .

Правильная реберная раскраска f графа G называется *вершинно-различающей реберной раскраской* (сокращенно: *VDP-раскраской*) графа G , если для любых двух различных вершин u и v выполняется условие $S(u, f) \neq S(v, f)$. Минимальное количество цветов, необходимое для VDP-раскраски графа G , не содержащего изолированных ребер или более одной изолированной вершины, называется *вершинно-различающим хроматическим индексом* (сокращенно VDP-хроматическим индексом) и обозначается через $\chi'_{vd}(G)$.

Определение вершинно-различающей реберной раскраски графа было введено в [2,3] и, независимо, как «наблюдаемость» графа в [4–6].

Если для данного графа G существует вершинно-различающая реберная k – раскраска, тогда для любого числа $1 \leq d \leq \Delta(G)$, имеет место неравенство $\binom{n}{k} \geq n_d$, где n_d – это количество вершин со степенью d . Сделаем следующее обозначение

$$\pi(G) = \min \left\{ k : \binom{n}{k} \geq n_d \text{ для любого } 1 \leq d \leq \Delta(G) \right\}.$$

Понятно, что для вершинно-различающей реберной раскраски графа G нужно использовать, как минимум, $\pi(G)$ цветов. В работе [3] Баррис и Шелп предложили следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Если для графа G существует вершинно-различающая реберная раскраска, тогда имеет место следующее неравенство

$$\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1.$$

Гипотеза была доказана для полных и полных двудольных графов, для объединения путей, а также для некоторых других классов графов.

Основные результаты

В работе [7] были рассмотрены три типа обобщения для специального класса графов. Для любых натуральных чисел $k, n \geq 2$ и l обозначим через $W'(k, n, l)$ раф, состоящий из n копий полного графа K_k , вершины которых соединены с вершинами полного графа K_l , называемыми *центральной вершинами*. Граф $W'(k, n, 1)$ принято обозначать как $W(k, n)$.

Прежде всего, нами найдено точное значение $\chi'_{vd}(W(k, n))$ для произвольных натуральных чисел $k, n \geq 2$.

Теорема 1. Для любых натуральных чисел $k, n \geq 2$ имеет место следующее:

- $\chi'_{vd}(W(2, 2)) = 5$,
- $\chi'_{vd}(W(k, n)) = k \cdot n$, если $k > 2$ или $n > 2$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что любая вершинно-различающая реберная раскраска графа $W(k, n)$, использует не менее чем $n \cdot k$ цветов. По определению $W(k, n)$, центральная вершина графа соединена с $n \cdot k$ вершинами графа. По определению правильной раскраски, все ребра инцидентные этой вершине должны быть раскрашены в различные цвета, откуда следует, что $\chi'_{vd}(W(k, n)) \geq \chi'(W(k, n)) \geq n \cdot k$.

Обозначим через K_k^i i -ую копию графа K_k в графе $G = W(k, n)$, а через $V(K_k^i) = \{v_0^i, v_1^i, \dots, v_{k-1}^i\}$ – множество вершин графа K_k^i ($1 \leq i \leq n$). Множество вершин графа G – это множество $V(G) = V(K_k^1) \cup V(K_k^2) \cup \dots \cup V(K_k^n) \cup \{w\}$, где w – единственная центральная вершина графа G . Рассмотрим два случая.

Случай 1. $k = 2$ и $n = 2$.

Для графа $W(2,2)$ определим реберную раскраску $\phi_{W(2,2)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_{W(2,2)}(v_0^1 w) &= 0, \phi_{W(2,2)}(v_1^1 w) = 1, \phi_{W(2,2)}(v_0^2 w) = 2, \\ \phi_{W(2,2)}(v_1^2 w) &= 3, \phi_{W(2,2)}(v_0^1 v_1^1) = 2, \phi_{W(2,2)}(v_0^2 v_1^2) = 4.\end{aligned}$$

По определению $\phi_{W(2,2)}$, имеем

$$\begin{aligned}S(v_0^1, \phi_{W(2,2)}) &= \{0, 2\}, S(v_1^1, \phi_{W(2,2)}) = \{1, 2\}, S(v_0^2, \phi_{W(2,2)}) = \{2, 4\}, \\ S(v_1^2, \phi_{W(2,2)}) &= \{3, 4\}, S(w, \phi_{W(2,2)}) = \{0, 1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

$\phi_{W(2,2)}$ является вершинно-различающей реберной 5-раскраской. Легко показать, что для графа $W(2,2)$ не существует вершинно-различающей реберной раскраски, использующей меньшее количество цветов.

Случай 2. $k > 2$ или $n > 2$.

Для любого числа $1 \leq p \leq n$ определим раскраску $f_{K_k^p}$ для графа K_k^p следующим образом: для любого ребра $v_i^p v_j^p \in E(K_k^p)$, где $0 \leq i < j \leq k-1$

$$f_{K_k^p}(v_i^p v_j^p) = (p-1) \cdot k + (i+j) \bmod k.$$

По определению $f_{K_k^p}$, для произвольной вершины $v_i^p \in V(K_k^p)$, где $0 \leq i \leq k-1$

$$\begin{aligned}S(v_i^p, f_{K_k^p}) &= \{(p-1) \cdot k, (p-1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\} \\ &\quad \setminus \{(p-1) \cdot k + (2i) \bmod k\}.\end{aligned}$$

Понятно, что $f_{K_k^p}$ является правильной раскраской графа K_k^p . Далее определим раскраску f_G для графа G следующим образом: для произвольного $e \in E(G)$ и для любого числа $1 \leq p \leq n$

$$f_G(e) = \begin{cases} f_{K_k^p}(e), & \text{если } e \in E(K_k^i) \\ (p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k), & \text{если } e = wv_i^p \ (0 \leq i \leq k-1) \end{cases}$$

По определению f_G , имеем

$$\begin{aligned}\triangleright S(v_i^p, f_G) &= S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}, \text{ когда } 0 \leq i \leq k-1 \text{ и } 1 \leq \\ &p \leq n-1,\end{aligned}$$

- $S(v_i^n, f_G) = S(v_i^n, f_{K_k^p}) \cup \{i\}$, когда $0 \leq i \leq k-1$,
- $S(w, f_G) = \{0, 1, \dots, n \cdot k - 1\}$.

Сначала покажем, что f_G является правильной раскраской. Поскольку $f_{K_k^p}$ — правильная раскраска, то достаточно показать, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$ ($0 \leq i \leq k-1, 1 \leq p \leq n$).

Действительно, согласно определению раскраски, $S(v_i^p, f_{K_k}) \subseteq \{(p-1) \cdot k, (p-1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$. Если $p < n$, то $(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k) = p \cdot k + i$ и так как $i \geq 0$, получаем $p \cdot k + i > p \cdot k - 1$, откуда следует, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$. Если $p = n$, то $(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k) = i$, и поскольку $0 \leq i < k \leq (p-1) \cdot k$, также имеем, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$.

Теперь покажем, что для любых двух различных вершин $u, z \in V(G)$ выполняется

$$S(u, f_G) \neq S(z, f_G)$$

Логически возможны следующие подслучаи:

Случай 2.1 $u = w, z \in K_k^i$ ($1 \leq i \leq n$).

Не сложно убедиться, что $|S(u, f_G)| = n \cdot k$, а $|S(z, f_G)| = k$. Поскольку $n \geq 2$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ содержат различное количество цветов, следовательно, они не совпадают.

Случай 2.2 $u = v_i^p, z = v_j^q$ ($0 \leq i, j \leq k-1, 1 \leq p \leq q < n, i \neq j$ или $p \neq q$).

Согласно определению раскраски f_G , имеем $S(u, f_G) = S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}$ и $S(z, f_G) = S(v_j^q, f_{K_k^q}) \cup \{q \cdot k + j\}$.

Поскольку $p \cdot k + i \neq q \cdot k + j$, то множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпасть только в том случае, если $q \cdot k + j \in S(v_i^p, f_{K_k^p})$, однако из того, что $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \subset \{(p-1) \cdot k, (p-1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$ и $q \cdot k + j > p \cdot k - 1$ следует, что $q \cdot k + j \notin S(v_i^p, f_{K_k^p})$.

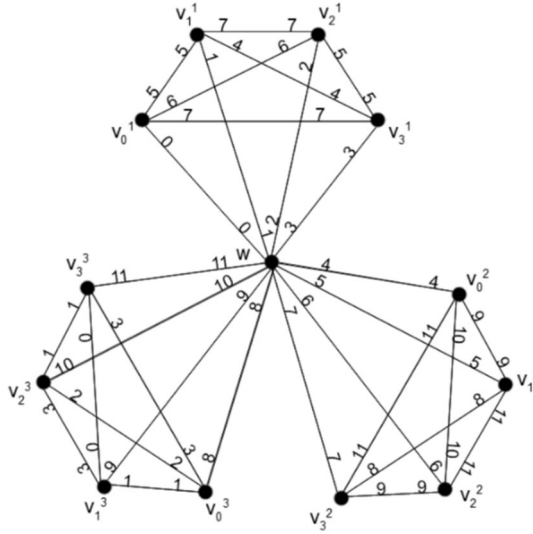


Рисунок 1. VDP-раскраска графа $W(4, 3)$ с использованием 12 цветов.

Случай 2.3 $u = v_i^p, z = v_j^n$ ($0 \leq i, j \leq k - 1, 1 \leq p < n$).

По определению f_G , $S(u, f_G) = S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}$ и $S(z, f_G) = S(v_j^n, f_{K_k^n}) \cup \{j\}$. По определению $f_{K_k^p}$ и $f_{K_k^n}$, $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \subset \{(p - 1) \cdot k, (p - 1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n}) \subset \{(n - 1) \cdot k, (n - 1) \cdot k + 1, \dots, n \cdot k - 1\}$. Поскольку $p < n$, множества $S(v_i^p, f_{K_k^p})$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n})$ не пересекаются, то есть $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cap S(v_j^n, f_{K_k^n}) = \emptyset$. С другой стороны, $p \cdot k + i \neq j$, следовательно, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпадать только в том случае, когда $S(v_i^p, f_{K_k^p}) = j$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n}) = \{p \cdot k + i\}$, что возможно только при $k = 2$ и $n = 2$. Однако по условию рассматриваемого случая $n > 2$ или $k > 2$, следовательно, $S(u, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Случай 2.4 $u = v_i^n, z = v_j^n$ ($0 \leq i < j \leq k - 1$).

Согласно определению, раскраски f_G , имеем:

$$S(u, f_G) = S(v_i^n, f_{K_k^n}) \cup \{i\}, S(z, f_G) = S(v_j^n, f_{K_k^n}) \cup \{j\}.$$

Поскольку $i \neq j$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпадать только в том случае, если $j \in S(v_i^n, f_{K_k^n})$. Однако это невозможно, так как $S(v_i^n, f_{K_k^n}) \subset \{(n-1) \cdot k, (n-1) \cdot k + 1, \dots, n \cdot k - 1\}$ в то время как $j < k \leq (n-1) \cdot k$. Следовательно, $j \notin S(v_i^n, f_{K_k^n})$.

Раскраска f_G использует цвета $0, 1, \dots, n \cdot k - 1$, следовательно $\chi'_{vd}(W(k, n)) = \chi'(W(k, n)) = n \cdot k$.

Теперь найдём точное значение вершинно-различающего хроматического индекса для графа $W'(k, n, l)$ в частном случае.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел k, n, l , таких что $2 \leq l < k \cdot n$, справедливо следующее равенство:

$$\chi'_{vd}(W'(k, n, l)) = k \cdot n + l.$$

Доказательство. Сперва покажем, что не существует вершинно-различающей раскраски графа $W'(k, n, l)$, использующей менее чем $k \cdot n + l$ цветов. Поскольку $l \geq 2$, центральный граф K_l содержит как минимум две вершины, каждая из которых соединена с $k \cdot n + l - 1$ вершинами. По определению вершинно-различающей реберной раскраски, спектры этих вершин не должны совпадать, поэтому необходимо использовать не менее $k \cdot n + l$ различных цветов.

Пусть дан граф $G = W'(k, n, l)$, для которого $V(G) = V_{K_l} \cup V_{K_k^1} \cup V_{K_k^2} \cup \dots \cup V_{K_k^n}$, где $V(K_l) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}\}$ – множество вершин графа K_l , а $V(K_k^p) = \{u_{(p-1) \cdot k}, u_{(p-1) \cdot k + 1}, \dots, u_{p \cdot k - 1}\}$ – множество вершин p -ой копии полного графа K_k , обозначаемой через K_k^p ($1 \leq p \leq n$).

Для каждого полного графа K_k^p ($1 \leq p \leq n$) определим правильную реберную раскраску $f_{K_k^p}$ следующим образом: для произвольного ребра $u_i u_j \in E(G)$, где $0 \leq i < j \leq n \cdot k - 1$, положим:

$$f_{K_k^p}(u_i u_j) = ([i + j + 3] \bmod k + p \cdot k + l - 1) \bmod (n \cdot k + l).$$

Согласно определению раскраски $f_{K_k^p}$, для любой вершины $u_i \in V(K_k^p)$, где $(p-1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1$, выполняются следующие условия:

$$\triangleright S(u_i, f_{K_k^p}) \subset \{l + p \cdot k - 1, l + p \cdot k, \dots, l + (p+1) \cdot k - 2\},$$

когда $1 \leq p \leq n-1$,

$$\triangleright S(u_i, f_{K_k^p}) \subset \{l + n \cdot k - 1, 0, 1, \dots, k - 2\}, \text{ когда } p = n.$$

Обозначим $M_i = i \bmod (n \cdot k + l)$ и определим реберную раскраску f_G для графа G следующим образом: для каждого ребра $e \in E(G)$

$$f_G(e) = \begin{cases} i + j, & \text{если } e = v_i u_j \ (0 \leq i \leq l-1, 0 \leq j \leq n \cdot k - 1), \\ M_{i+j+n \cdot k}, & \text{если } e = v_i v_j \ (0 \leq i < j \leq l-1), \\ f_{K_k^p}(e), & \text{если } e \in E(K_k^p) \ (1 \leq p \leq n). \end{cases}$$

По определению f_G , имеем

$$\triangleright S(v_i, f_G) = [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2i+n \cdot k}\}, \text{ когда } 0 \leq i \leq l-1,$$

$$\triangleright S(u_j, f_G) = S(u_j, f_{K_k^p}) \cup \{j, j+1, \dots, j+l-1\}, \text{ когда } (p-1) \cdot k \leq j \leq p \cdot k - 1 \ (1 \leq p \leq n).$$

Покажем, что для любых различных вершин $w, z \in V(G)$ выполняется

$$S(w, f_G) \neq S(z, f_G).$$

Рассмотрим следующие три случая:

Случай 1. $w \in K_l, z \in K_k^p \ (1 \leq p \leq n)$.

Нетрудно проверить, что $|S(u, f_G)| = n \cdot k + l - 1$, а $|S(z, f_G)| = k + l$. Поскольку $n \geq 2$ и $k \geq 2$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ содержат различное количество цветов, следовательно, эти множества не совпадают.

Случай 2. $w = v_i, z = v_j \ (0 \leq i < j \leq l-1)$.

Согласно определению раскраски f_G , имеем:

$$\begin{aligned} S(w, f_G) &= [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2i+n \cdot k}\}, \\ S(z, f_G) &= [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2j+n \cdot k}\}. \end{aligned}$$

Множества $S(w, f_G)$ и $S(z, f_G)$ совпадают тогда и только тогда, когда $M_{2i+n \cdot k} = M_{2j+n \cdot k}$, то есть $2i \equiv 2j \pmod{[n \cdot k + l]}$.

Поскольку $0 < j - i < l < n \cdot k$, имеем $0 < 2 \cdot (j - i) < n \cdot k + l$, откуда следует, что $2i \not\equiv 2j \pmod{[n \cdot k + l]}$.

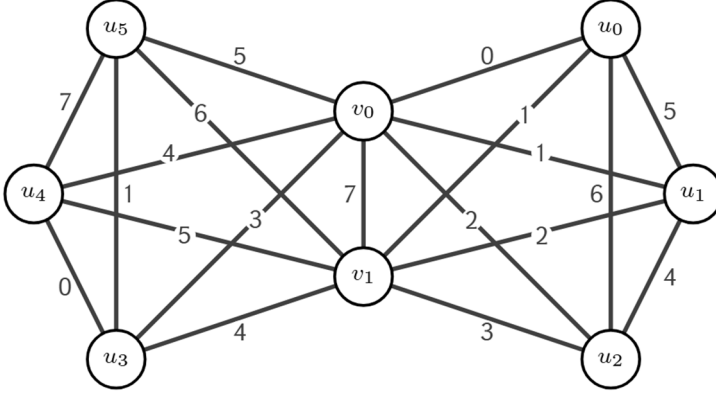


Рисунок 2. VDP-раскраска графа $W'(2, 3, 2)$ с использованием 8 цветов.

Случай 3. $w = u_i, z = u_j$ ($0 \leq i < j \leq n \cdot k - 1$).

Пусть $w \in K_k^p$ и $z \in K_k^q$ при $1 \leq p \leq q \leq n$. Согласно определению раскраски f_G , имеем:

$$S(w, f_G) = S(u_i, f_{K_k^p}) \cup \{i, i + 1, \dots, i + l - 1\} \text{ и}$$

$$S(z, f_G) = S(u_j, f_{K_k^q}) \cup \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}.$$

Возможны следующие подслучаи:

Случай 3.1 $w = u_i, z = u_j \in K_k^p$ ($1 \leq p < n, (p - 1) \cdot k \leq i < j \leq p \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски $f_{K_k^p}$, $S(u_j, f_{K_k^p}) \subset \{l + p \cdot k - 1, l + p \cdot k, \dots, l + (p + 1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $i < l + p \cdot k - 1$, то $i \notin S(u_j, f_{K_k^p})$. С другой стороны, так как $i < j$, то $i \notin \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}$. Очевидно, что цвет i содержится в множестве $S(w, f_G)$, но не содержится в $S(z, f_G)$, следовательно, эти множества не совпадают.

Случай 3.2 $w = u_i, z = u_j \in K_k^q$ ($1 \leq p < q < n, (p-1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1, (q-1) \cdot k \leq j \leq q \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски $f_{K_k^q}$, $S(z, f_{K_k^q}) \subset \{l + q \cdot k - 1, l + q \cdot k, \dots, l + (q+1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $|S(z, f_{K_k^q})| = k - 1$, то по крайней мере одно из двух чисел $(q+1) \cdot k + l - 3$ и $(q+1) \cdot k + l - 2$ принадлежит множеству $S(z, f_{K_k^q})$. Так как $S(z, f_{K_k^q}) \subset S(z, f_G)$, то по крайней мере одно из этих чисел также принадлежит $S(z, f_G)$. Согласно определению f_G , $S(w, f_G) \subseteq \{i, i+1, \dots, i+l-1, l+p \cdot k - 1, l+p \cdot k, \dots, l+(p+1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $q > p$ и $k \geq 2$, то $l + (q+1) \cdot k - 3 > l + (p+1) \cdot k - 2$, а значит ни одно из чисел $(q+1) \cdot k + l - 3$ и $(q+1) \cdot k + l - 2$ не принадлежит множеству $S(w, f_G)$. Таким образом $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Случай 3.3 $w = u_i \in K_k^p, z = u_j \in K_k^n$ ($1 \leq p < n, (p-1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1, (n-1) \cdot k \leq j \leq n \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски f_G , $S(w, f_G) \subset \{i, i+1, \dots, i+l-1\} \cup S(w, f_{K_k^p})$ и $S(z, f_G) \subset \{j, j+1, \dots, j+l-1\} \cup S(z, f_{K_k^n})$. Поскольку $S(z, f_{K_k^n}) \subset \{l+n \cdot k - 1, 0, 1, \dots, k-2\}$ и $|S(z, f_{K_k^n})| = k - 1$, то, по крайней мере, одно из двух чисел 0 и $n \cdot k + l - 1$ принадлежит множеству $S(z, f_{K_k^n})$. Очевидно, что $S(z, f_{K_k^n}) \subset S(z, f_G)$, следовательно, хотя бы одно из этих чисел также принадлежит $S(z, f_G)$. Если $n \cdot k + l - 1 \in S(z, f_G)$, то $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$, поскольку $n \cdot k + l - 1 \notin S(w, f_G)$.

Предположим теперь, что $n \cdot k + l - 1 \notin S(z, f_G)$. Тогда $S(z, f_G) = \{0, 1, \dots, k-2, j, j+1, \dots, j+l-1\}$. Поскольку $S(w, f_{K_k^p}) \subset \{l+p \cdot k - 1, l+q \cdot k, \dots, l+(q+1) \cdot k - 2\}$, то равенство $S(w, f_G) = S(z, f_G)$ возможно только в том случае, если $i = 0$ и $\{j, j+1, \dots, j+l-1\} = S(w, f_{K_k^p}) \subseteq \{k+l-1, k+l, \dots, 2k+l-2\}$. Так как $|S(w, f_{K_k^p})| = k - 1$, то получаем, что $l = k - 1$ и $j \in \{2k-2, 2k-1\}$, что возможно только в случае, когда $n = 2$. Тогда, согласно определению

раскраски $f_{K_k^n}$, имеем $f(u_{2k-1}u_{2k-2}) = 2k + l - 1$. Так как $2k + l - 1 \notin S(z, f_G)$, то $j \notin \{2k - 2, 2k - 1\}$.

Случай 3.4 $w = u_i, z = u_j \in K_k^n$ ($k \cdot (n - 1) \leq i < j \leq n \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски f_G , $S(w, f_G) = \{i, i + 1, \dots, i + l - 1\} \cup S(w, f_{K_k^n})$ и $S(z, f_G) = \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\} \cup S(z, f_{K_k^n})$, где $S(z, f_{K_k^n}) \subset \{n \cdot k + l - 1, 0, 1, \dots, k - 2\}$. Поскольку $k - 2 < i < n \cdot k + l - 1$, то $i \notin S(z, f_{K_k^n})$. Более того, так как $i < j$, то $i \notin \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}$. Легко заметить, что цвет i принадлежит множеству $S(w, f_G)$, но не принадлежит множеству $S(z, f_G)$, следовательно, $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Заключение

В данной работе были получены точные значения вершинно-различающего хроматического индекса для одного класса графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. West D. Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
2. Burris A. Vertex-distinguishing edge-colorings. Ph.D. Dissertation, Memphis State University, 1993.
3. Burris A., Schelp R. Vertex-distinguishing proper edge-colorings, Journal of Graph Theory 26(2), 1997. PP. 73–82.
4. Cerný J., Horňák M., Soták R. Observability of a graph. Math. Slovaca 46, 1996. PP. 21–31.
5. Horňák M., Soták R. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. Ars Comb. 41, 1995. PP. 289–301.
6. Horňák M., Soták R. Asymptotic behavior of the observability of Q_n , Discrete Math. 176, 1997. PP. 139–148.
7. Kooij R. On generalized windmill graphs, Linear Algebra and its Applications 565, 2019. PP. 25–46.

ON VERTEX DISTINGUISHING PROPER EDGE COLORINGS OF A CLASS OF GRAPHS

P. Petrosyan^{1,2}, T. Petrosyan²

Yerevan State University¹

Russian-Armenian (Slavonic) University²

ABSTRACT

A proper edge coloring of a graph G is a mapping $f: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges $e, e' \in E(G)$. A proper edge coloring f of a graph G is called vertex distinguishing if for any two distinct vertices $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$, where $S(v, f) = \{f(e) \mid e = vw \in E(G)\}$. The minimum number of colors required for a vertex distinguishing proper coloring of a graph G is denoted by $\chi'_{vd}(G)$ and called vertex distinguishing chromatic index of G . In this work we provide an upper bound on the vertex distinguishing chromatic index of windmill graphs and some generalized windmill graphs.

Keywords: edge-coloring, vertex distinguishing edge-coloring, vertex distinguishing chromatic index, windmill graphs, generalized windmill graphs.