

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-33-40
УДК 519.17

Поступила: 03.06.2025г.
Сдана на рецензию: 03.06.2025г.
Подписана к печати: 09.05.2025г.

О СИЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ РАСКРАСКАХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

П.А. Петросян^{1,2}, А.К. Драмбян²

¹Ереванский государственный университет

²Российско-Армянский (Славянский) университет

petros_petrosyan@ysu.am, ardrambyan@gmail.com

ORCID: ¹<https://orcid.org/0000-0001-7070-1417>,

²<https://orcid.org/0009-0002-2691-6976>

АННОТАЦИЯ

Сильной реберной раскраской графа G называется отображение $\phi: E(G) \rightarrow N$, при котором любые два ребра, находящиеся на расстоянии меньше двух, получают различные цвета. Минимальное количество цветов, необходимое для такого раскрашивания, называется «сильным хроматическим индексом графа G » и обозначается как $\chi'_s(G)$. 1993 году Брюальди и Масси выдвинули гипотезу о том, что для любого двудольного графа G справедливо неравенство $\chi'_s(G) \leq ab$, где a – максимальная степень вершины в одной доле, а b – максимальная степень вершины в другой доле. В данной работе доказывается справедливость этой гипотезы для регулярных двудольных графов G при $\Delta(G) \leq 5$, а также для ряда би-регулярных двудольных графов, обладающих особой факторизацией.

Ключевые слова: реберная раскраска, сильная реберная раскраска, сильный хроматический индекс, двудольные графы.

Введение

В данной работе рассматриваются только конечные графы. Для не определенных в этой работе понятий и обозначений мы используем

книгу Уеста [1]. Множество вершин и множество ребер графа G обозначается через $V(G)$ и $E(G)$, соответственно. Степень вершины $v \in V(G)$ обозначается через $d_G(v)$, а максимальная из степеней вершин графа G – как $\Delta(G)$. Хроматическое число графа G обозначается через $\chi(G)$. Подграф графа G , порожденный вершинами $V' \subseteq V(G)$, обозначается через $G[V']$. Граф называется *регулярным*, если степени всех вершин равны. Граф G называется *двудольным*, если $V(G)$ можно разбить на две части так, что каждое ребро соединяет вершину из одной части с вершиной другой части (доли). В дальнейшем мы будем использовать обозначение (X, Y, E) для двудольного графа G , где X и Y доли графа G , а E – множество ребер G . Скажем, что двудольный граф $G = (X, Y, E)$ является (a, b) -двудольным, если максимальная степень вершины из X равняется a , а максимальная степень вершины из Y равняется b . (a, b) -двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется *бирегулярным*, если все степени вершин из X равны a , и все степени вершин из Y равны b . (a, b) -двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется *почти бирегулярным*, если все степени вершин из X равны a , а степени вершин из Y равны a или b . Операция над графом G , при котором удаляется ребро $(v, u) \in E(G)$, и отождествляются вершины v и u , называется *стягиванием ребра (v, u)* . Скажем, что граф H является *минором* графа G , если из графа G можно получить граф H удалением ребер, вершин и стягиванием ребер. *Сильной реберной раскраской* графа G называется «отображение $\phi: E(G) \rightarrow N$ », при котором любые два ребра, находящиеся на расстоянии меньше двух, получают различные цвета. Минимальное количество цветов, необходимое для такого раскрашивания, называется *сильным хроматическим индексом* графа G и обозначается как $\chi'_s(G)$. Сильные реберные раскраски ввели Фуке и Жоливье в 1983 году [2]. В 1985, во время семинара в Праге, Эрдеши и Нешетриль выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Для любого графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4} \Delta(G)^2, & \text{если } \Delta(G) \text{ четное,} \\ \frac{1}{4} (5\Delta(G)^2 - 2\Delta(G) + 1), & \text{если } \Delta(G) \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В 1992 и 1993 годах Андерсен и Хорак, независимо друг от друга, доказали, что гипотеза верна для графов G с $\Delta(G) = 3$ [3, 4]. В 2006 году Кранстон [5] доказал, что $\chi'_s(G) \leq 22$ для графов G с $\Delta(G) = 4$, а в 2018 году оценка была улучшена до $\chi'_s(G) \leq 21$ [6]. На сегодняшний день Гипотеза 1 остается открытой для графов G с $\Delta(G) \geq 4$. Также известно, что $\chi'_s(G) \leq 1.772\Delta(G)^2$ для графов G с достаточно большим $\Delta(G)$ [7]. В 1993 году Брюальди и Масси выдвинули следующую гипотезу о сильных реберных раскрасках двудольных графов.

Гипотеза 2. Для любого (a, b) -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq ab.$$

Гипотезу 2 удалось доказать только в следующих частных случаях [8, 9].

Теорема 1 (Накпрасит). Для любого $(2, r)$ -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 2r.$$

Теорема 2 (Хуанг, Ю, Жоу). Для любого $(3, r)$ -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 3r.$$

Основные результаты

Вначале мы рассмотрим сильные реберные раскраски регулярных двудольных графов, максимальная степень которых не превосходит 5.

Определение 1. Подмножество ребер M графа G называется паросочетанием, если любые два ребра из M не имеют общей вершины.

Определение 2. Паросочетание M графа G называется совершенным, если ребра из M покрывают все вершины G .

Теорема 3. Для любого регулярного двудольного графа G , для которого $K_{\Delta(G)+1}$ не является минором и $\Delta(G) \leq 5$, имеет место следующее неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq \Delta(G)^2.$$

Доказательство. Поскольку G является регулярным двудольным графом, существуют $M_1, M_2, \dots, M_{\Delta(G)}$ совершенные паросочетания – такие, что для любой пары $1 \leq i \neq j \leq \Delta(G)$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ и $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{\Delta(G)} = E$. Рассмотрим графы G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$), которые получаются из графа G – стягиванием ребер из M_i . Для ребра $(x, y) \in M_i$ ($1 \leq i \leq \Delta(G)$), обозначим через $v_{(x,y)}$ вершину графа G_i , которое образуется стягиванием ребра (x, y) . Так как $K_{\Delta(G)+1}$ не является минором G , $K_{\Delta(G)+1}$, также не является минором для G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$). Из результатов о правильных вершинных раскрасках [10, 11] следует, что для любого графа G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$) существует правильная вершинная раскраска f_i цветами $1, 2, \dots, \Delta(G)$.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: ребро $(x, y) \in M_i$ ($1 \leq i \leq \Delta(G)$) красим цветом $\Delta(G)(i - 1) + f_i(v_{(x,y)})$.

Рассмотрим произвольные ребра $(x, y), (x', y') \in E$ – такие, что $\phi((x, y)) = \phi((x', y'))$. Очевидно, что ребра (x, y) и (x', y') принадлежат одному паросочетанию M_k ($k \in [1, \Delta(G)]$). Из построения ϕ следует, что $f_k(v_{(x,y)}) = f_k(v_{(x',y')})$. Получаем, что $d_{G_k}(v_{(x,y)}, v_{(x',y')}) \geq 2$. Следовательно, ребра (x, y) и (x', y') также находятся на расстоянии не менее 2 в графе G . Так как выбор ребер (x, y) и (x', y') был произвольным, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $\Delta(G)^2$ цветов.

Далее, рассмотрим сильные реберные раскраски двудольных графов, которые обладают особой факторизацией. Для следующей леммы нам понадобится классический результат из теории факторизаций.

Определение 3. Граф G называется «псевдографом», если в нем допускаются кратные ребра и петли (ребра соединяющие вершину с собой).

Теорема 4 (Петерсен). Любой $2r$ -регулярный псевдограф G разлагается на r непересекающихся 2-факторов.

Лемма 1. Для любого $(2, 2r)$ -почти бирегулярного двудольного графа $G = (X, Y, E)$ существует разложение на $F_1, F_2, \dots, F_r$ подграфы – такое, что:

- a) $E(F_1) \cup E(F_2) \cup \dots \cup E(F_r) = E(G)$,
- b) Для любой пары $1 \leq i \neq j \leq r$, $E(F_i) \cap E(F_j) = \emptyset$,
- c) Для любого $1 \leq i \leq r$, F_i является 2-регулярным,
- d) Для любого $1 \leq i \leq r$, $F_i = G[V(F_i)]$.

Доказательство. Рассмотрим $2r$ -регулярный псевдограф G' , который получается из G – добавлением петель. По Теореме 4, граф G' разлагается на $F'_1, F'_2, \dots, F'_r$ 2-факторы. Легко заметить, что для любой вершины $v \in V(G')$, где $d_{G'}(v) = 2$ – смежные ребра v , отличные от петель, принадлежат одному и тому же 2-фактору, и более того – одной и той же компоненте связности из этого 2-фактора.

Построим подграфы F_i ($1 \leq i \leq r$) графа G из 2-факторов F'_i – удаляя петли и появившиеся изолированные вершины.

Очевидно, что подграфы $F_1, F_2, \dots, F_r$ удовлетворяют условиям леммы a), b), и c). Обоснуем, что условие d) также выполняется. Пусть $F_i = (X_i, Y_i, E_i)$, $1 \leq i \leq r$. Так как все смежные ребра любой вершины $x \in X_i$ ($1 \leq i \leq r$) принадлежат подграфу F_i , подграф, порожденный вершинами $X_i \cup Y_i$, совпадает с F_i .

Лемма 2. Для любого $(2, 2r)$ -почти бирегулярного графа $G = (X, Y, E)$ справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 4r.$$

Доказательство. Для графа G существует разложение на подграфы $F_1, F_2, \dots, F_r$, удовлетворяющие условиям Леммы 1. Так как F_i ($1 \leq i \leq r$) 2-регулярен, для него существует сильная реберная раскраска 4 цветами.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: для каждого числа i ($1 \leq i \leq r$), красим F_i используя цвета $4(i-1) + 1, 4(i-1) + 2, 4(i-1) + 3, 4i$.

Рассмотрим произвольные ребра $(x, y), (x', y') \in E(G)$ – такие, что $\phi((x, y)) = \phi((x', y'))$. По построению ϕ , эти ребра принадлежат одному и тому же подграфу F_k ($k \in [1, r]$). Если в графе G существует ребро (x, y') или ребро (x', y) , то, по условию d) Леммы 1, это ребро также принадлежит подграфу F_k , что противоречит построению раскраски для данного подграфа. Следовательно, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $4r$ цвета.

Результат Леммы 2 также следует из Теоремы 1, однако, в отличие от доказательства Теоремы 1, доказательство Леммы 2 предлагает полиномиальный алгоритм для построения сильных реберных раскрасок $(2, 2r)$ -почти бирегулярных графов.

Теорема 5. Для любого $(2l, 2r)$ -бирегулярного графа G , который разлагается на r $(2l, 2)$ -бирегулярных подграфов, справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 4lr.$$

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \dots, G_r$ $(2l, 2)$ -бирегулярные подграфы являются разложением G . По Лемме 2, для каждого подграфа G_i ($1 \leq i \leq r$) существует сильная реберная раскраска в $2l$ цвета.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: каждый подграф G_i ($1 \leq i \leq r$) красим используя цвета $2l(i-1) + 1, 2l(i-1) + 2, \dots, 2li$.

Так как для каждого подграфа используется сильная реберная раскраска непересекающимися цветами, и любой путь, соединяющий ребра из одного подграфа и проходящий через ребра других подграфов, имеет длину не менее 2, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $4lr$ цветов.

Заключение

Вначале мы показали верхнюю оценку для сильного хроматического индекса регулярных двудольных графов, когда максимальная степень не превосходит 5. Далее, мы рассмотрели разложение $(2, 2r)$

почти бирегулярных графов на подграфы и построили сильные реберные раскраски для $(2, 2r)$ -почти бирегулярных графов, используя полученное свойство. В конце мы установили верхнюю оценку для сильного хроматического индекса $(2l, 2r)$ -бирегулярных графов, обладающих особой факторизацией. Полученные в данной работе результаты подтверждают гипотезу Брюальди-Масси в ряде частных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *West D.* Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
2. *Fouquet J. L. and Jolivet J. L.* Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons. *Ars Combinatoria* 16(A), 1983. PP. 141–150.
3. *Andersen L.* The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Mathematics*, 108 (1–3), 1992. PP. 231–252.
4. *Horák P., Qing H. and Trotter W.* Induced matchings in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 17 (2), 1993. PP. 151–160.
5. *Cranston D.* Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Mathematics*, 306 (21), 2006. PP. 2772–2778.
6. *Huang M., Santana M. and Yu G.* Strong chromatic index of graphs with maximum degree four. *Electronic Journal of Combinatorics* 25 (3), 2018. PP. 3–31.
7. *Hurley E., Rémi de Joannis de Verclos and Kang R.* An improved procedure for colouring graphs of bounded local density. In *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. PP. 135–148.
8. *Nakprasit K.* A note on the strong chromatic index of bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 308 (16), 2008. PP. 3726–3728.
9. *Huang M., Yu G., Zhou X.* The strong chromatic index of $(3, \Delta)$ -bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 340 (5), 2017. PP. 1143–1149.
10. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. *American Mathematical Society*, 98, 1989.
11. *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* Hadwiger’s conjecture for K_6 -free graphs. *Combinatorica*, 13 (3), 1993. PP. 279–361.

ON STRONG EDGE-COLORINGS OF BIPARTITE GRAPHS

*P. Petrosyan^{1,2}, A. Drambyan²*¹*Yerevan State University*²*Russian-Armenian (Slavonic) University*

ABSTRACT

A strong edge coloring of a graph G is a mapping $\phi: E(G) \rightarrow N$ such that any two edges at distance less than two receive distinct colors. The minimum number of colors required for such a coloring is called the strong chromatic index of G and denoted by $\chi'_s(G)$. In 1993, Brualdi and Massey conjectured that for any bipartite graph G holds $\chi'_s(G) \leq ab$, where a is the maximum vertex degree in one partition, and b is the maximum vertex degree in the other partition. In this paper we prove the validity of the conjecture for regular bipartite graphs G with $\Delta(G) \leq 5$ and for biregular bipartite graphs with special factorizations.

Keywords: edge-coloring, strong edge-coloring, strong chromatic index, bipartite graphs.