

МАТЕМАТИКА

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-7-17
УДК 517.53

Поступила: 03.05.2025г.
Сдана на рецензию: 05.05.2025г.
Подписана к печати: 13.05.2025г.

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА $K^*(u)^*$

С.Л. Берберян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
samvel357@mail.ru*

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуются некоторые граничные свойства произвольных гармонических функций, определенных в единичном круге, вдоль орициклических путей в точках множества $K^*(u)$. Изучение в точках этого множества граничного поведения различных классов функций, определенных в единичном круге, обосновано тем, что множество точек $K^*(u)$ является массивным как в метрическом смысле, так и топологическом смысле.

Ключевые слова: гармонические функции, касательные пути, P' -последовательности, множество точек $K^*(u)$, орициклические углы.

* Работа выполнена в рамках программы развития РАУ из средств Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

1. Введение

При исследовании граничных свойств функций вдоль касательных путей часто появляются дополнительные трудности по сравнению с изучением граничных свойств функций вдоль некасательных путей. При этом могут получиться результаты, отличные от известных в случае некасательных путей. Например, классическая теорема Фату о существовании у аналитических функций граничных пределов почти всюду на единичной окружности вдоль некасательных путей не всегда верно в случае касательных путей [1]. Вопросами существования граничных значений вдоль касательных путей у мероморфных и аналитических функций занимались такие известные математики, как Привалов, Ловатер, Пирамян, Багемил [1]. В данной работе изучается множество точек $K^*(u)$ для гармонических функций. Это множество является множеством меры 2π и ее дополнение до единичной окружности есть множество 1 категории [1] или [2]. Поэтому представляет интерес рассматривать граничное поведение различных классов функций $u(z)$, определенных в единичном круге, в точках множества $K^*(u)$. Это, значит, что множество $K^*(u)$ является массивным как в метрическом, так и в топологическом смысле [3].

В настоящей работе полученные результаты относительно граничного поведения гармонических функций вдоль орициклических путей являются аналогами некоторых ранее известных результатов относительно граничного поведения мероморфных и гармонических функций вдоль некасательных путей ([1], [2], [3]). Отметим, что при получении результатов данной работы важную роль сыграли рассматриваемые для гармонических функций P' -последовательности, введенные автором в работе [4].

2. Предварительные понятия и известные результаты

В дальнейшем придерживаемся общепринятых обозначений [1], [2], [3], [4].

Обозначим через $\Lambda(\xi)$ орицикл, который является окружностью, касающейся изнутри единичную окружность Γ в точке $\xi \in \Gamma$. Через $\Lambda(\xi)^-$ и $\Lambda(\xi)^+$ обозначим, соответственно, левый и правый орициклы орицикла $\Lambda(\xi)$ в точке ξ .

Пусть Γ и $OD(\xi)$ соответственно единичная окружность и орициклический угол. Орициклический угол – это угол, образуемый двумя орициклами в точке ξ . Два орицикла $\Lambda(\xi)^1$ и $\Lambda(\xi)^2$ круга D в точке $\xi \in \Gamma$, ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга D , проведенный в точке $\xi \in \Gamma$, делит на две равные части, называемые «левым орициклическим углом $\Lambda(\xi)^-$ » и правым орициклическим углом $\Lambda(\xi)^+$ в точке ξ .

Интерпретируя круг D , как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неевклидово расстояние между точками z_1 и z_2 из круга D :

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \text{ где } u = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|.$$

Рассмотрим действительнзначную функцию $f(z)$, определенную в D . Обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ для произвольного подмножества S круга D , для которого $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой относительно множества S , т.е. $C(f, \xi, S) = \overline{\cap f((S \cap U(\xi)))}$, где пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ , а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\bar{R}$ множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$.

Пусть $K^*(u)$ – множество точек $\xi \in \Gamma$, в которых предельные множества $C(f, \xi, OD(\xi))$ совпадают для всех орициклических углов $OD(\xi)$. Известно (см. например, [1]), что дополнение к множеству $K^*(u)$ первой категории и меры нуль. Придерживаясь определения, введенного в работе [7], в случае орициклических углов обозначим через $L_*(u)$ множество точек $\xi \in \Gamma$, в которых предельные множества $C(f, \xi, OD(\xi))$

совпадают для всех орициклических углов $OD(\xi)$ и не совпадают с расширенным множеством действительных чисел, то есть с $\bar{R}$.

Если предельные множества $C(f, \xi, OD(\xi))$ совпадают для всех орициклических углов $OD(\xi)$ и состоят из одной точки, то этом случае скажем, что в точке $\xi \in \Gamma$ функция $u(z)$ имеет орициклическое граничное значение. Справедливо следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2 , лежащих на орицикле $\Lambda(\xi)^1$ и произвольного другого орицикла $\Lambda(\xi)^2$, имеем

$$\sigma(z_1, \Lambda(\xi)^2) = \sigma(z_2, \Lambda(\xi)^2) = const.$$

Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, следуя работе [5], применительно к гармоническим функциям, назовем P' -последовательностью, если для любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ имеет место следующее утверждение: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ в объединении $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(z_{n_k}, \varepsilon)$ неевклидовых кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon)$ с неевклидовыми центрами z_{n_k} и неевклидовыми радиусами $\varepsilon > 0$ гармоническая функция $u(z)$ принимает бесконечно часто каждое конечное действительное значение. Назовем орицикл $\Lambda(\xi)$ P' -орициклом гармонической функции $u(z)$ в точке ξ , если $\Lambda(\xi)$ содержит некоторую P' -последовательность функции $u(z)$. Орицикл $\Lambda(\xi)$, не являющийся P' -орициклом, назовем нормальным.

Отметим, что при изучении граничных свойств у действительнoзначных функций мы сталкиваемся с дополнительными трудностями по сравнению с мероморфными и голоморфными функциями, так как аналитический аппарат, развитый для указанных классов функций, часто невозможно применить для действительнoзначных функций.

Приведем несколько известных результатов, необходимых в дальнейшем.

Теорема А ([5]). Предположим, что существует последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, и последовательность

точек $\{z_n\}$, где $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, по которой гармоническая в D функция $u(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = \alpha$, в то время, как для каждого n в неевклидовом круге $D(z_n, \delta_n) = \{z \in D, \sigma(z_n, z) < \delta_n\}$ существует точка t_n , в которой

$$\begin{aligned} |u(t_n) - \alpha| &\geq \varepsilon_0, \text{ если } \alpha - \text{конечное число,} \\ |u(t_n)| &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \text{ если } \alpha - \text{бесконечное число} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – фиксированное число. Тогда из последовательности $\{z_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, являющуюся P' – последовательностью для функции $u(z)$.

Теорема В ([6]). Пусть S – произвольная подобласть круга D , и точка $\xi \in \Gamma$ является одной из предельных точек множества S . Если гармоническая в D функция $f(z)$ имеет $C(f, \xi, S) \neq \bar{R}$, то для любых последовательностей точек $\{z_n\}$, $\{z'_n\}$, $z_n, z'_n \in S$, $n \in N$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi$, из свойства $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = a$.

3. Основные результаты

Одним из основных результатов данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть гармоническая в круге D функция $u(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ по некоторой последовательности точек $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi \in K^*(u)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, и допустим α не является орициклическим граничным значением функции $u(z)$ точке $\xi \in K^*(u)$. Тогда функция $u(z)$ обладает в D последовательностью P' -точек $\{\xi_n\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$.

Доказательство. Без нарушения общности будем рассматривать правые орициклы $\Lambda(\xi)^+$ (аналогично можно рассматривать левые орициклы $\Lambda(\xi)^-$) и правые орициклические углы $O\Delta\xi^+$ (аналогично левые

орициклические углы $O\Delta\xi^-$). Положим $\delta_n = \sigma(z_n, z_{n+1})$, где $n = 1, 2, \dots$. Предположим сначала, что существует такая последовательность точек $\{z'_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$z'_{n_k} \in \Lambda(\xi)^+, \lim_{k \rightarrow \infty} z'_{n_k} = \xi, \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_{n_k}, z'_{n_k}) = 0,$$

для которой имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |u(z'_{n_k}) - \alpha| &\geq \varepsilon_0, \text{ если } \alpha - \text{конечное,} \\ |u(z'_{n_k})| &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \text{ если } \alpha - \text{бесконечное,} \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Это значит, что удовлетворяются условия теоремы А. Поэтому из последовательности $\{z_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, которая является P' -последовательностью для функции $u(z)$, что и требовалось доказать. Теперь предположим, что

$$\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \alpha, z \in \Lambda(\xi)^+ \quad (2)$$

Рассмотрим вложенную последовательность орициклических углов $O\Delta_n \xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda(\xi)^+$. Так как, по условию, значение α не является орициклическим граничным значением функции $u(z)$ в граничной точке ξ , то существует такое значение $\beta \in \bar{R}$, отличное от α , что в каждом орициклическом угле найдется последовательность $\{t_k^n\}_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k^n) = \beta$. Изменяя n , получим множество последовательностей

$$t_1^1, t_2^1, \dots, t_k^1, \dots; t_1^2, t_2^2, \dots, t_k^2, \dots; t_1^n, t_2^n, \dots, t_k^n, \dots; \dots$$

Из этого множества последовательностей в силу свойств орициклов в неевклидовой геометрии можно выбрать последовательность

$\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ – такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \beta$, где q_m – некоторая последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . В силу предположения $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_m) = \alpha$ и, таким образом, опять выполнены условия теоремы А. Еще раз применяя утверждение этой теоремы из последовательности $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ выделим подпоследовательность, которая является последовательностью P' -точек функции $u(z)$. Тем самым доказано утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Очевидно, что из существования орициклического граничного значения в произвольной точке $\xi \in K^*(u)$ следует отсутствие последовательности P' -точек в любом орициклическом угле $O\Delta(\xi)$.

Замечание 2. То, что условие теоремы 1 $\xi \in K^*(u)$ существенно, можно легко увидеть на примере функции $f(z) = \arg(1 - z)$ в точке $\xi = 1$. В этой точке данная гармоническая функция не имеет орициклического граничного значения, так как по правым и левым орициклам стремится, соответственно, к $-\pi/2$ и $\pi/2$, не принадлежит множеству $K^*(u)$ и, очевидно, нет последовательности P' -точек в D , так как рассмотренная функция ограничена.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Для того, чтобы гармоническая в D функция $u(z)$ имела в точке $\xi \in K^*(u)$ орициклическое граничное значение α , необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный или бесконечный предел $\lim_{n \leftarrow \infty} u(z_n) = \alpha$ по некоторой последовательности $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, где $\Lambda(\xi)$ – некоторый фиксированный орицикл, $\lim_{n \leftarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$ и нет P' -последовательностей в любом орициклическом угле $O\Delta(\xi)$.

Необходимость условий теоремы 2 очевидна.

Достаточность условий теоремы 2 непосредственно следует из утверждения теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 в случае некасательных путей для мероморфных функций доказано в работе [3], а для гармонических функций в работе [5].

Рассмотрим теоремы о связи некоторых предельных множеств вдоль орициклических путей.

Теорема 3. Если для гармонической в D функции $f(z)$ имеет место соотношение

$$C(f, \xi, O\Delta(\xi).) \neq \bar{R}$$

для некоторого угла $O\Delta(\xi)$ и $\xi \in K^*(f)$, то равенство

$$C(f, \xi, \Lambda(\xi)) = C(f, \xi, O\Delta(\xi)).$$

справедливо для любого орицикла $\Lambda(\xi)$ и любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$.

Доказательство. Без нарушения общности, будем рассматривать правые орициклы $\Lambda(\xi)^+$ (аналогично можно рассматривать левые орициклы $\Lambda(\xi)^-$) и правые орициклические углы $O\Delta\xi^+$ (аналогично левые орициклические углы $O\Delta\xi^-$). Возьмем произвольный орицикл $\Lambda(\xi)^+$ и рассмотрим вложенную последовательность орициклических углов $O\Delta_n\xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda(\xi)^+$. Доказательство ведем методом от противного. Это значит, что найдется число $\alpha \in C(f, \xi, O\Delta_n\xi^+)$ для любого равного орициклического угла $O\Delta_n\xi^+$, содержащего орицикл $\Lambda(\xi)^+$ и допустим, что $\alpha \notin C(f, \xi, \Lambda(\xi)^+)$. Из сделанных предположений следует, что в каждом орициклическом угле $O\Delta_n\xi^+$ этой последовательности существует такая последовательность точек $\{t_k^n\}_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k^n) = \alpha$. Рассуждая так же, как в теореме 1, получим последовательность $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ – такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \alpha$, где q_m – последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . В силу утверждения теоремы В $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_m) = \alpha$, что противоречит предположению. Так как $\xi \in$

$K^*(f)$, то отсюда следует утверждение теоремы 3 для любого правого орициклического угла $OD\xi^+$.

Аналогично, теорема доказывается для левых орициклов и левых орициклических углов.

Рассмотрим теорему 4 об орициклических точках Линделефа.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ – произвольная гармоническая функция, определенная в D и $\xi \in K^*(u)$. Если существует такой орицикл $\Lambda(\xi)$, для которого справедливы условия:

1. $C(u, \xi, \Lambda(\xi)) \neq \bar{R}$
2. орицикл $\Lambda(\xi)$ является нормальным для функции $u(z)$, то точка ξ является орициклической точкой Линделефа.

Доказательство ведем, как и в предыдущих теоремах, для правых орициклов $\Lambda^+(\xi)$ (аналогично проводится для левых орициклов $\Lambda^-(\xi)$). Рассмотрим последовательность правых орициклических углов $OD_n\xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda^+(\xi)$. Очевидно, что $C(u, \xi, \Lambda^+(\xi)) \subseteq C(u, \xi, OD_n\xi^+)$ при любом n . Так как $\xi \in K^*(u)$, то при любом n имеет место совпадение предельных множеств $C(u, \xi, OD_n\xi^+)$. Покажем, что при любом n справедливо соотношение

$$C(u, \xi, \Lambda^+(\xi)) = C(u, \xi, OD_n\xi^+) \quad (3)$$

Действительно, допуская противное и рассуждая так же, как в теореме 3, получим, что можно выбрать такую последовательность точек $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ лежащую в последовательности орициклических углов $OD_m\xi^+$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \alpha$, а $\lim_{m \rightarrow \infty} u(q_m) = \beta \neq \alpha$, где q_m – некоторая последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . Но тогда выполняются условия теоремы А для последовательности q_m и, значит, можно из нее выделить подпоследовательность q_{m_l} , которая является для $u(z)$ P' -последовательностью. Но это противоречит тому, что орицикл $\Lambda^+(\xi)$ является нормальным орициклом. Следовательно, $\alpha \in C(u, \xi, \Lambda^+(\xi))$ и, значит, соотношение (3) доказано. Так как по условию предельное множество

$C(u, \xi, \Lambda(\xi)) \neq \bar{R}$ и $\xi \in K^*(u)$, то из соотношения (3) следует утверждение теоремы 4.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе изучены некоторые граничные свойства гармонических функций вдоль орициклических путей. Ранее аналогичные результаты для мероморфных и гармонических функций были получены известными математиками в случае некасательных путей. Много результатов, связанных с исследованием граничного поведения мероморфных и других классов функций, определенных в единичном круге, в случае некасательных путей, приведены в монографиях [8], [9] и [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллингвуд Э. и Ловатер А. Теория предельных множеств. 1971, М.: Изд-во «Мир», С. 306.
2. Носиро К. Предельные множества. 1963, М.: Изд-во Иностран. литер. С. 253.
3. Гаврилов В.И. О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными // Матем. сбор., 1965, т. 67 (109), № 3, 408–427.
4. Bagetihl F. Horocyclic boundary properties of meromorphic functions. Annal. Acad. Scien. Fennicae, 1966, Ser. AI, № 385, 1–18.
5. Берберян С.Л. О распределении значений гармонических функций в единичном круге. Известия вузов. Математика, № 6. СС.12–19. 2011.
6. Берберян С.Л., Гаврилов В.И. Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям. Mathematica Montisnigri, 1993, Vol.1, 17–25.
7. Гаврилов В.И., Захарян В.С. Множество точек Линделефа произвольных комплексных функций, ДАН АрмССР 86 (1), 12–16 (1988).
8. Джрбабян М.М., Захарян В.С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. 1993, М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 224с.
9. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. 1950, М.-Л.: ГИТТЛ. С. 336.
10. Ловатер А. Граничное поведение аналитических функций. В сборн. «Итоги науки и техники» / «Математический анализ», т. 10, 1973, 99–260.

**ON SOME BOUNDARY PROPERTIES OF HARMONIC FUNCTIONS
AT POINTS OF THE SET $K^*(u)$**

S. Berberyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

In this paper, we study some boundary properties of arbitrary harmonic functions defined in a unit circle along oryccyclic paths at points in the set $K^*(u)$. The study of the boundary behavior of various classes of functions defined in a unit circle at points in this set is justified by the fact that the set of points $K^*(u)$ is massive both in the metric sense and in the topological sense.

Keywords: harmonic functions, tangent paths, sequences, set of points $K^*(u)$, oryccyclic angles.