

Russian-Armenian (Slavonic) University

*Printed by the decision of
the Academic Council of RAU*

V E S T N I K
OF RUSSIAN-ARMENIAN (SLAVONIC) UNIVERSITY
**(SERIES: PHYSICALMATHEMATICAL AND
NATURAL SCIENCES)**

RAU University Press
No. 1/2025

Российско-Армянский (Славянский) университет

*Печатается по решению
Ученого Совета РАУ*

В Е С Т Н И К
РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО (СЛАВЯНСКОГО)
УНИВЕРСИТЕТА
(СЕРИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ)

Издательство РАУ
№ 1/2025

Вестник РАУ, № 1. – Ер.: Изд-во РАУ, 2025. – 100 с.

Главный редактор: академик НАН РА, д.ф.-м.н., проф. *Казарян Э.М.*

Зам. главного редактора: к.ф.-м.н., д.филос.н., проф. *Аветисян П.С.*

Ответственный секретарь: к.х.н. *Шагинян Р.С.*

Редакционная коллегия:

Математика и информатика

Р.Г. Арамян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Институт Математики НАН РА

Д.Г. Асатрян – д.т.н., проф., Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Г.Г. Казарян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

О.В. Бесов – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

В.И. Буренков – д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

А.Г. Сергеев – академик РАН, д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

А.И. Аветисян – академик РАН, д.ф.-м.н., проф., Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН (Россия)

В.Ш. Меликян – член-корр. НАН РА, д.т.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Synopsys

Биологические и химические науки

А.А. Аракелян – д.б.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Институт Молекулярной биологии НАН РА

В.И. Муронец – д.б.н., проф., Московский государственный университет (МГУ) (Россия)

А.А. Оганесян – к.б.н., доц., Российско-Армянский университет (РАУ)

Р.В. Захарян – к.б.н., Российско-Армянский университет (РАУ)

Г.Г. Данагулян – член-корр. НАН РА, д.х.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

К.Б. Назарян – д.б.н., проф., Институт Молекулярной биологии НАН РА

Л.М. Епископосян – д.б.н., проф., Институт Молекулярной биологии НАН РА

А.Б. Киракосян – д.б.н., проф., Массачусетский технологический институт (США)

Физико-технические науки

Д.А. Фирсов – д.ф.-м.н., проф., СПбПУ им. Петра Великого (Россия)

А.В. Папоян – член-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., проф., Институт физических исследований НАН РА

С.Г. Петросян – член-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

А.А. Саркисян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

Е.Ш. Мамасахлисов – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

В.Г. Аветисян – д.т.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

Журнал основан в 2003 году и входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА и РИНЦ

Российско-Армянский университет, 2025г.

Vestnik of the RAU, No. 1. – Yer.: RAU Publishing House, 2025. – 100 p.

Editor-in-Chief: Academician of NAS RA, D.Sc. in Physics and Mathematics,
Prof. **Kazaryan E.M.**

Deputy Editor-in-chief: Ph.D. in Mathematics, D. Sc. in Philosophy, Prof. **Avetisyan P.S.**

Executive secretary: Ph.D. in Science (Chemistry) **Shaginyan R.S.**

Editorial team

Mathematics and Computer Science

R.G. Aramyan – D. Sc. (Mathematics), Prof., Russian-Armenian University (RAU), Institute of Mathematics NAS RA

D.G. Asatryan – D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Institute of Informatics and Automation Problems of NAS RA

G.G. Kazaryan – D. Sc. (Mathematics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

O.V. Besov – corresponding member of RAS, D. Sc. (Mathematics), Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

I.A. Burenkov – D. Sc., Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

A.G. Sergeev – Academician of the Russian Academy of Sciences, D. Sc. (Mathematics), Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

A.I. Avetisyan – Academician of the Russian Academy of Sciences, D. Sc. (Mathematics), Prof., Institute of System Programming Named after V.P. Ivannikov RAS (Russia)

V.Sh. Melikyan – corresponding member of NAS RA, D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Russian-Armenian University (RAU), Synopsys

Biological and Chemical Sciences

A.A. Arakelyan – D. Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

I.A. Muronets – D. Sc. (Biology), Prof., Moscow State University (Russia)

A.A. Hovhannisyan – Ph.D. in Science (Biology), Russian-Armenian University (RAU)

R.V. Zakharyan – Ph.D. in Science (Biology), Russian-Armenian University (RAU)

G.G. Danagulyan – corresponding member of NASRA, D. Sc. (Chemistry), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

K.B. Nazaryan – D.Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

L.M. Episkoposyan – D.Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

A.B. Kirakosyan – D.Sc. (Biology), Prof., Massachusetts Institute of Technology (USA)

Physical and Technical Sciences

D.A. Firsov – D. Sc. (Physics), Prof., SPbPU Named after Peter the Great (Russia)

A.V. Papoyan – corresponding member of NAS RA, D.Sc. (Physics), Prof., Institute of Physical Research NAS RA

S.G. Petrosyan – corresponding member of NAS RA, D. Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

A.A. Sargsyan – D.Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

E.S. Mamasakhlisov – D.Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

V.G. Avetisyan – D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

The journal founded in 2003 is included in the list of periodicals registered by HAC RA and RSCI

Russian-Armenian University, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

МАТЕМАТИКА

Берберян С.Л. О некоторых граничных свойствах гармонических функций в точках множества $K^*(u)$	7
Drambyan A. On strong chromatic index of lexicographic products of graphs	18
Petrosyan T. On vertex distinguishing proper edge colorings of the cartesian sum of graphs	26
Петросян П.А., Драмбян А.К. О сильных реберных раскрасках двудольных графов	33
Петросян П.А., Петросян Т.К. Вершинно-различающие реберные раскраски одного класса графов	41

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Арутюнян Л.А. Возможность использования инверторов напряжения в солнечных электростанциях по критерию искажения формы напряжения	53
Sahakyan V.A. Accuracy improvement technique for on-chip current sources with no external components	64
Амбарцумян А.В., Манукян Т.Ш., Сугян Г.З., Степанян Г.Г. Оптимизация алгоритмов пеленгации для повышения точности в РЧ-системах	74
Ghazaryan A.A. Macro placement optimization using diffusion models	80
Мелконян С.Э., Сиволенко Э.Р., Эйрамджян С.Г. Разработка ручного пеленгатора на основе технологии программируемого радио	89

МАТЕМАТИКА

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-7-17
УДК 517.53

Поступила: 03.05.2025г.
Сдана на рецензию: 05.05.2025г.
Подписана к печати: 13.05.2025г.

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА $K^*(u)$ *

С.Л. Берберян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
satvel357@mail.ru*

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуются некоторые граничные свойства произвольных гармонических функций, определенных в единичном круге, вдоль орициклических путей в точках множества $K^*(u)$. Изучение в точках этого множества граничного поведения различных классов функций, определенных в единичном круге, обосновано тем, что множество точек $K^*(u)$ является массивным как в метрическом смысле, так и топологическом смысле.

Ключевые слова: гармонические функции, касательные пути, P' -последовательности, множество точек $K^*(u)$, орициклические углы.

* Работа выполнена в рамках программы развития РАУ из средств Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

1. Введение

При исследовании граничных свойств функций вдоль касательных путей часто появляются дополнительные трудности по сравнению с изучением граничных свойств функций вдоль некасательных путей. При этом могут получиться результаты, отличные от известных в случае некасательных путей. Например, классическая теорема Фату о существовании у аналитических функций граничных пределов почти всюду на единичной окружности вдоль некасательных путей не всегда верно в случае касательных путей [1]. Вопросами существования граничных значений вдоль касательных путей у мероморфных и аналитических функций занимались такие известные математики, как Привалов, Ловатер, Пиранян, Багемил [1]. В данной работе изучается множество точек $K^*(u)$ для гармонических функций. Это множество является множеством меры 2π и ее дополнение до единичной окружности есть множество 1 категории [1] или [2]. Поэтому представляет интерес рассматривать граничное поведение различных классов функций $u(z)$, определенных в единичном круге, в точках множества $K^*(u)$. Это, значит, что множество $K^*(u)$ является массивным как в метрическом, так и в топологическом смысле [3].

В настоящей работе полученные результаты относительно граничного поведения гармонических функций вдоль орициклических путей являются аналогами некоторых ранее известных результатов относительно граничного поведения мероморфных и гармонических функций вдоль некасательных путей ([1], [2], [3]). Отметим, что при получении результатов данной работы важную роль сыграли рассматриваемые для гармонических функций P' -последовательности, введенные автором в работе [4].

2. Предварительные понятия и известные результаты

В дальнейшем придерживаемся общепринятых обозначений [1], [2], [3], [4].

Обозначим через $\Lambda(\xi)$ орицикл, который является окружностью, касающейся изнутри единичную окружность Γ в точке $\xi \in \Gamma$. Через $\Lambda(\xi)^-$ и $\Lambda(\xi)^+$ обозначим, соответственно, левый и правый орициклы орицикла $\Lambda(\xi)$ в точке ξ .

Пусть Γ и $\text{ОД}(\xi)$ соответственно единичная окружность и орициклический угол. Орициклический угол – это угол, образуемый двумя орициклами в точке ξ . Два орицикла $\Lambda(\xi)^1$ и $\Lambda(\xi)^2$ круга D в точке $\xi \in \Gamma$, ограничивают некоторую односвязную область, которую диаметр круга D , проведенный в точке $\xi \in \Gamma$, делит на две равные части, называемые «левым орициклическим углом $\Lambda(\xi)^-$ » и правым орициклическим углом $\Lambda(\xi)^+$ в точке ξ .

Интерпретируя круг D , как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1 и z_2 из круга D :

$$\sigma(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \text{ где } u = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2} \right|.$$

Рассмотрим действительнзначную функцию $f(z)$, определенную в D . Обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ для произвольного подмножества S круга D , для которого $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой относительно множества S , т.е. $C(f, \xi, S) = \overline{\cap f((S \cap U(\xi)))}$, где пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ , а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации \bar{R} множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$.

Пусть $K^*(u)$ – множество точек $\xi \in \Gamma$, в которых предельные множества $C(f, \xi, \text{ОД}(\xi))$ совпадают для всех орициклических углов $\text{ОД}(\xi)$. Известно (см. например, [1]), что дополнение к множеству $K^*(u)$ первой категории и меры нуль. Придерживаясь определения, введенного в работе [7], в случае орициклических углов обозначим через $L_*(u)$ множество точек $\xi \in \Gamma$, в которых предельные множества $C(f, \xi, \text{ОД}(\xi))$

совпадают для всех орициклических углов $O\Delta(\xi)$ и не совпадают с расширенным множеством действительных чисел, то есть с \bar{R} .

Если предельные множества $C(f, \xi, O\Delta(\xi))$ совпадают для всех орициклических углов $O\Delta(\xi)$ и состоят из одной точки, то этом случае скажем, что в точке $\xi \in \Gamma$ функция $u(z)$ имеет орициклическое граничное значение. Справедливо следующее свойство орициклов: для произвольных точек z_1 и z_2 , лежащих на орицикле $\Lambda(\xi)^1$ и произвольного другого орицикла $\Lambda(\xi)^2$, имеем

$$\sigma(z_1, \Lambda(\xi)^2) = \sigma(z_2, \Lambda(\xi)^2) = const.$$

Последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, следуя работе [5], применительно к гармоническим функциям, назовем P' -последовательностью, если для любой ее бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_k}\}$ имеет место следующее утверждение: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ в объединении $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(z_{n_k}, \varepsilon)$ неевклидовых кругов $D(z_{n_k}, \varepsilon)$ с неевклидовыми центрами z_{n_k} и неевклидовыми радиусами $\varepsilon > 0$ гармоническая функция $u(z)$ принимает бесконечно часто каждое конечное действительное значение. Назовем орицикл $\Lambda(\xi)$ P' -орициклом гармонической функции $u(z)$ в точке ξ , если $\Lambda(\xi)$ содержит некоторую P' -последовательность функции $u(z)$. Орицикл $\Lambda(\xi)$, не являющийся P' -орициклом, назовем нормальным.

Отметим, что при изучении граничных свойств у действительнoзначных функций мы сталкиваемся с дополнительными трудностями по сравнению с мероморфными и голоморфными функциями, так как аналитический аппарат, развитый для указанных классов функций, часто невозможно применить для действительнoзначных функций.

Приведем несколько известных результатов, необходимых в дальнейшем.

Теорема А ([5]). Предположим, что существует последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, и последовательность

точек $\{z_n\}$, где $z_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, по которой гармоническая в D функция $u(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = \alpha$, в то время, как для каждого n в неевклидовом круге $D(z_n, \delta_n) = \{z \in D, \sigma(z_n, z) < \delta_n\}$ существует точка t_n , в которой

$$\begin{aligned} |u(t_n) - \alpha| &\geq \varepsilon_0, \text{ если } \alpha - \text{конечное число,} \\ |u(t_n)| &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \text{ если } \alpha - \text{бесконечное число} \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – фиксированное число. Тогда из последовательности $\{z_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, являющуюся P' – последовательностью для функции $u(z)$.

Теорема В ([6]). Пусть S – произвольная подобласть круга D , и точка $\xi \in \Gamma$ является одной из предельных точек множества S . Если гармоническая в D функция $f(z)$ имеет $C(f, \xi, S) \neq \bar{R}$, то для любых последовательностей точек $\{z_n\}$, $\{z'_n\}$, $z_n, z'_n \in S$, $n \in N$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi$, из свойства $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = a$.

3. Основные результаты

Одним из основных результатов данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть гармоническая в круге D функция $u(z)$ имеет конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ по некоторой последовательности точек $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \xi \in K^*(u)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(z_n, z'_n) = 0$, и допустим α не является орициклическим граничным значением функции $u(z)$ точке $\xi \in K^*(u)$. Тогда функция $u(z)$ обладает в D последовательностью P' -точек $\{\xi_n\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$.

Доказательство. Без нарушения общности будем рассматривать правые орициклы $\Lambda(\xi)^+$ (аналогично можно рассматривать левые орициклы $\Lambda(\xi)^-$) и правые орициклические углы $O\Delta\xi^+$ (аналогично левые

орициклические углы $O\Delta\xi^-$). Положим $\delta_n = \sigma(z_n, z_{n+1})$, где $n = 1, 2, \dots$. Предположим сначала, что существует такая последовательность точек $\{z'_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$,

$$z'_{n_k} \in \Lambda(\xi)^+, \lim_{k \rightarrow \infty} z'_{n_k} = \xi, \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(z_{n_k}, z'_{n_k}) = 0,$$

для которой имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |u(z'_{n_k}) - \alpha| &\geq \varepsilon_0, \text{ если } \alpha - \text{конечное,} \\ |u(z'_{n_k})| &\leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \text{ если } \alpha - \text{бесконечное,} \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Это значит, что удовлетворяются условия теоремы А. Поэтому из последовательности $\{z_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$, которая является P' -последовательностью для функции $u(z)$, что и требовалось доказать. Теперь предположим, что

$$\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = \alpha, z \in \Lambda(\xi)^+ \quad (2)$$

Рассмотрим вложенную последовательность орициклических углов $O\Delta_n \xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda(\xi)^+$. Так как, по условию, значение α не является орициклическим граничным значением функции $u(z)$ в граничной точке ξ , то существует такое значение $\beta \in \bar{R}$, отличное от α , что в каждом орициклическом угле найдется последовательность $\{t_k^n\}_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k^n) = \beta$. Изменяя n , получим множество последовательностей

$$t_1^1, t_2^1, \dots, t_k^1, \dots; t_1^2, t_2^2, \dots, t_k^2, \dots; t_1^n, t_2^n, \dots, t_k^n, \dots; \dots$$

Из этого множества последовательностей в силу свойств орициклов в неевклидовой геометрии можно выбрать последовательность

$\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ – такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \beta$, где q_m – некоторая последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . В силу предположения $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_m) = \alpha$ и, таким образом, опять выполнены условия теоремы А. Еще раз применяя утверждение этой теоремы из последовательности $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ выделим подпоследовательность, которая является последовательностью P' -точек функции $u(z)$. Тем самым доказано утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Очевидно, что из существования орициклического граничного значения в произвольной точке $\xi \in K^*(u)$ следует отсутствие последовательности P' -точек в любом орициклическом угле $OD(\xi)$.

Замечание 2. То, что условие теоремы 1 $\xi \in K^*(u)$ существенно, можно легко увидеть на примере функции $f(z) = \arg(1 - z)$ в точке $\xi = 1$. В этой точке данная гармоническая функция не имеет орициклического граничного значения, так как по правым и левым орициклам стремится, соответственно, к $-\pi/2$ и $\pi/2$, не принадлежит множеству $K^*(u)$ и, очевидно, нет последовательности P' -точек в D , так как рассмотренная функция ограниченная.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Для того, чтобы гармоническая в D функция $u(z)$ имела в точке $\xi \in K^*(u)$ орициклическое граничное значение α , необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный или бесконечный предел $\lim_{n \leftarrow \infty} u(z_n) = \alpha$ по некоторой последовательности $\{z_n\} \in \Lambda(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$, где $\Lambda(\xi)$ – некоторый фиксированный орицикл, $\lim_{n \leftarrow \infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$ и нет P' -последовательностей в любом орициклическом угле $OD(\xi)$.

Необходимость условий теоремы 2 очевидна.

Достаточность условий теоремы 2 непосредственно следует из утверждения теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 в случае некасательных путей для мероморфных функций доказано в работе [3], а для гармонических функций в работе [5].

Рассмотрим теоремы о связи некоторых предельных множеств вдоль орициклических путей.

Теорема 3. Если для гармонической в D функции $f(z)$ имеет место соотношение

$$C(f, \xi, O\Delta(\xi)) \neq \bar{R}$$

для некоторого угла $O\Delta(\xi)$ и $\xi \in K^*(f)$, то равенство

$$C(f, \xi, \Lambda(\xi)) = C(f, \xi, O\Delta(\xi)).$$

справедливо для любого орицикла $\Lambda(\xi)$ и любого орициклического угла $O\Delta(\xi)$.

Доказательство. Без нарушения общности, будем рассматривать правые орициклы $\Lambda(\xi)^+$ (аналогично можно рассматривать левые орициклы $\Lambda(\xi)^-$) и правые орициклические углы $O\Delta\xi^+$ (аналогично левые орициклические углы $O\Delta\xi^-$). Возьмем произвольный орицикл $\Lambda(\xi)^+$ и рассмотрим вложенную последовательность орициклических углов $O\Delta_n\xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda(\xi)^+$. Доказательство ведем методом от противного. Это значит, что найдется число $\alpha \in C(f, \xi, O\Delta_n\xi^+)$ для любого равного орициклического угла $O\Delta_n\xi^+$, содержащего орицикл $\Lambda(\xi)^+$ и допустим, что $\alpha \notin C(f, \xi, \Lambda(\xi)^+)$. Из сделанных предположений следует, что в каждом орициклическом угле $O\Delta_n\xi^+$ этой последовательности существует такая последовательность точек $\{t_k^n\}_{k=1}^\infty$, для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k^n) = \alpha$. Рассуждая так же, как в теореме 1, получим последовательность $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ – такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \alpha$, где q_m – последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . В силу утверждения теоремы В $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_m) = \alpha$, что противоречит предположению. Так как $\xi \in$

$K^*(f)$, то отсюда следует утверждение теоремы 3 для любого правого орициклического угла $O\Delta\xi^+$.

Аналогично, теорема доказывается для левых орициклов и левых орициклических углов.

Рассмотрим теорему 4 об орициклических точках Линделефа.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ – произвольная гармоническая функция, определенная в D и $\xi \in K^*(u)$. Если существует такой орицикл $\Lambda(\xi)$, для которого справедливы условия:

1. $C(u, \xi, \Lambda(\xi)) \neq \bar{R}$
2. орицикл $\Lambda(\xi)$ является нормальным для функции $u(z)$, то точка ξ является орициклической точкой Линделефа.

Доказательство ведем, как и в предыдущих теоремах, для правых орициклов $\Lambda^+(\xi)$ (аналогично проводится для левых орициклов $\Lambda^-(\xi)$). Рассмотрим последовательность правых орициклических углов $O\Delta_n\xi^+$, которая стягивается к орициклу $\Lambda^+(\xi)$. Очевидно, что $C(u, \xi, \Lambda^+(\xi)) \subseteq C(u, \xi, O\Delta_n\xi^+)$ при любом n . Так как $\xi \in K^*(u)$, то при любом n имеет место совпадение предельных множеств $C(u, \xi, O\Delta_n\xi^+)$. Покажем, что при любом n справедливо соотношение

$$C(u, \xi, \Lambda^+(\xi)) = C(u, \xi, O\Delta_n\xi^+) \quad (3)$$

Действительно, допуская противное и рассуждая так же, как в теореме 3, получим, что можно выбрать такую последовательность точек $\{t_{k_m}^m\}_{m=1}^\infty$ лежащую в последовательности орициклических углов $O\Delta_m\xi^+$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(t_{k_m}^m, q_m) = 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} u(t_{k_m}^m) = \alpha$, а $\lim_{m \rightarrow \infty} u(q_m) = \beta \neq \alpha$, где q_m – некоторая последовательность точек на орицикле $\Lambda(\xi)$, стремящаяся к ξ . Но тогда выполняются условия теоремы А для последовательности q_m и, значит, можно из нее выделить подпоследовательность q_{m_l} , которая является для $u(z)$ P' -последовательностью. Но это противоречит тому, что орицикл $\Lambda^+(\xi)$ является нормальным орициклом. Следовательно, $\alpha \in C(u, \xi, \Lambda^+(\xi))$ и, значит, соотношение (3) доказано. Так как по условию предельное множество

$C(u, \xi, \Lambda(\xi)) \neq \bar{R}$ и $\xi \in K^*(u)$, то из соотношения (3) следует утверждение теоремы 4.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе изучены некоторые граничные свойства гармонических функций вдоль орициклических путей. Ранее аналогичные результаты для мероморфных и гармонических функций были получены известными математиками в случае некасательных путей. Много результатов, связанных с исследованием граничного поведения мероморфных и других классов функций, определенных в единичном круге, в случае некасательных путей, приведены в монографиях [8], [9] и [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллингвуд Э. и Ловатер А. Теория предельных множеств. 1971, М.: Изд-во «Мир», С. 306.
2. Носиро К. Предельные множества. 1963, М.: Изд-во Иностран. литер. С. 253.
3. Гаврилов В.И. О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными // Матем. сбор., 1965, т. 67 (109), № 3, 408–427.
4. Vagetihi F. Horocyclic boundary properties of meromorphic functions. *Annal. Acad. Scien. Fennicae*, 1966, Ser. AI, № 385, 1–18.
5. Берберян С.Л. О распределении значений гармонических функций в единичном круге. *Известия вузов. Математика*, № 6. СС.12–19. 2011.
6. Берберян С.Л., Гаврилов В.И. Предельные множества непрерывных и гармонических функций по некасательным граничным путям. *Mathematica Montisnigri*, 1993, Vol.1, 17–25.
7. Гаврилов В.И., Захарян В.С. Множество точек Линделефа произвольных комплексных функций, *ДАН АрмССР* 86 (1), 12–16 (1988).
8. Джрбабян М.М., Захарян В.С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. 1993, М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 224с.
9. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. 1950, М.-Л.: ГИТТЛ. С. 336.
10. Ловатер А. Граничное поведение аналитических функций. В сборн. «Итоги науки и техники» / «Математический анализ», т. 10, 1973, 99–260.

**ON SOME BOUNDARY PROPERTIES OF HARMONIC FUNCTIONS
AT POINTS OF THE SET $K^*(u)$**

S. Berberyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

In this paper, we study some boundary properties of arbitrary harmonic functions defined in a unit circle along oryccyclic paths at points in the set $K^*(u)$. The study of the boundary behavior of various classes of functions defined in a unit circle at points in this set is justified by the fact that the set of points $K^*(u)$ is massive both in the metric sense and in the topological sense.

Keywords: harmonic functions, tangent paths, sequences, set of points $K^*(u)$, oryccyclic angles.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-18-25
УДК 519.17

Поступила: 10.03.2025г.
Сдана на рецензию: 11.03.2025г.
Подписана к печати: 16.03.2025г.

ON STRONG CHROMATIC INDEX OF LEXICOGRAPHIC PRODUCTS OF GRAPHS

A. Drambyan

*Russian-Armenian (Slavonic) University
ardrambyan@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2691-6976>*

ABSTRACT

A strong edge-coloring of a graph G is a mapping $\phi: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ such that the edges at distance 0 or 1 receive distinct colors. The minimum number of colors required for such a coloring is called the strong chromatic index of G and denoted by $\chi'_s(G)$. In this paper, we study the strong chromatic index of lexicographic product $G \cdot H$ of graphs G and H . In particular, we give tight lower and upper bounds on $\chi'_s(G \cdot H)$.

Keywords: edge-coloring, strong edge-coloring, strong chromatic index, lexicographic product.

Introduction

In this paper, we consider only simple and finite graphs. We use West's book [1] for terminologies and notations not defined here. We denote by $V(G)$ and $E(G)$ the sets of vertices and edges of a graph G , respectively. The degree of a vertex $v \in G$ is denoted by $d(v)$ and the maximum degree between the vertices in G by $\Delta(G)$. The chromatic number of a graph G is denoted by $\chi(G)$. We use standard notations P_n , C_n , K_n and $K_{n,m}$ for the path, cycle, complete graph with n vertices, and the complete

bipartite graph one part of which has n vertices, and the other one has m vertices, respectively. A *strong edge-coloring* of a graph G is a mapping $\phi: E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ such that the edges at distance 0 or 1 receive distinct colors. The *strong chromatic index* of a graph G is the minimum number of colors required for a strong edge coloring of the graph and is denoted by $\chi'_s(G)$. The concept of strong edge-coloring was introduced by Fouquet and Jolivet in 1983 [2]. In 1985, during a seminar in Prague, Erdős and Nešetřil proposed the following conjecture:

Conjecture 1. *For every graph G with maximum degree $\Delta(G)$,*

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4}\Delta(G)^2, & \text{if } \Delta(G) \text{ is even,} \\ \frac{1}{4}(5\Delta(G)^2 - 2\Delta(G) + 1), & \text{if } \Delta(G) \text{ is odd.} \end{cases}$$

The Conjecture 1 was proved to be true for graphs G with $\Delta(G) = 3$ [3, 4], but it is still open for graphs G with $\Delta(G) \geq 4$. In 2006, Cranston [5] showed that $\chi'_s(G) \leq 22$ for graphs G with $\Delta(G) = 4$, which was improved to $\chi'_s(G) \leq 21$ in 2018 by Huang et al. [6]. In 1990, Chung, Gyárfás, Trotter, and Tuza [7] showed that for graphs G , with significantly large maximum degree $\Delta(G)$, the strong chromatic index is at most $1.998\Delta(G)^2$. The upper bound was improved to $1.93\Delta(G)^2$ [8] in 2018 and later to $1.772\Delta(G)^2$ in 2021 [9].

The lexicographic product of graphs was introduced by Hausdorff in 1914 in the context of ordered sets and topology [10]. The lexicographic product of graphs found different implications in graph theory after and is actively considered in the context of various colorings (See, for example, [11], [12]).

Togni [13] was first to study strong-edge coloring of various graph products. In particular, Togni showed that the following theorems hold true.

Theorem 1 (Togni). Let G and H be two graphs. For the Cartesian product, we have

$$\chi'_s(G \square H) \leq \chi'_s(G)\chi(H) + \chi'_s(H)\chi(G).$$

Theorem 2 (Togni). Let G and H be two graphs different from K_2 . For the Kronecker product $G \times H$ we have

$$\chi'_s(G \times H) \leq \chi'_s(G)\chi'_s(H).$$

Theorem 3 (Togni). Let G and H be two graphs. For the strong product $G \boxtimes H$ we have

$$\chi'_s(G \boxtimes H) \leq \chi'_s(G)\chi(H) + \chi'_s(H)\chi(G) + 2\chi'_s(G)\chi'_s(H).$$

In this paper we consider strong-edge colorings of lexicographic products of graphs and provide tight lower and upper bounds on strong chromatic index of lexicographic products.

Main Results

Definition 1. The lexicographic product of graphs G and H is a graph $G \cdot H$, where $V(G \cdot H) = \{(v, x) : v \in V(G), x \in V(H)\}$ and $E(G \cdot H) = \{((v, x), (u, y)) : (v, u) \in E(G) \text{ or } v = u \text{ and } (x, y) \in E(H)\}$.

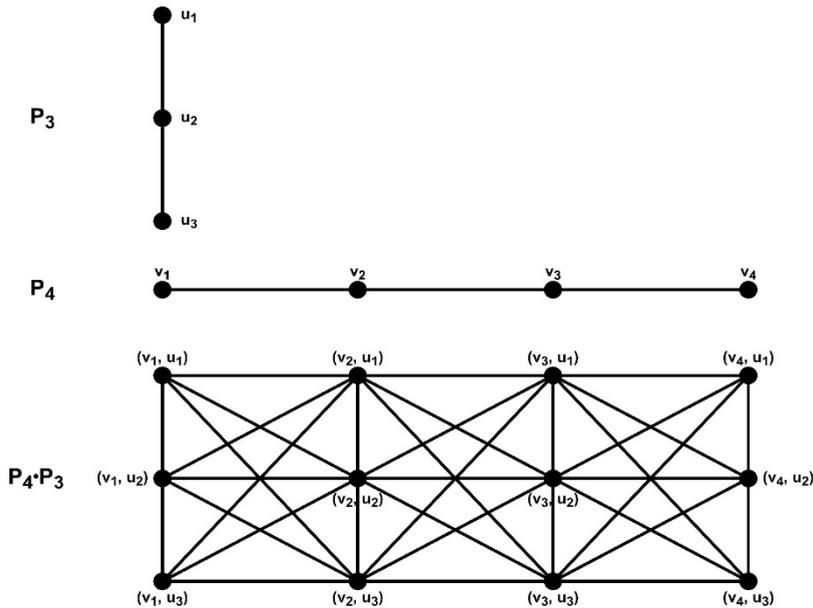


Figure 1. The lexicographical product of P_4 and P_3 .

Figure 2 illustrates the lexicographical product of P4 and P3.

Definition 2. For graphs H, G , and vertex $v \in V(G)$, denote by vH the subgraph of $G \cdot H$, such that, $V(vH) = \{(v, x) : (v, x) \in V(G \cdot H)\}$ and $E(vH) = \{((v, x), (v, y)) : ((v, x), (v, y)) \in E(G \cdot H)\}$.

Definition 3. For graphs H, G , and vertexes $v, u \in V(G)$, denote by $K_{(v,u)}$ the subgraph of $G \cdot H$, such that,

$$V(K_{(v,u)}) = \{(w, x) : w = v \text{ or } w = u, \text{ and } (w, x) \in V(G \cdot H)\} \text{ and}$$

$$E(K_{(v,u)}) = \{((v, x), (u, y)) : ((v, x), (u, y)) \in E(G \cdot H)\}.$$

It is easy to notice that for the lexicographic product $G \cdot H$, where G and H are arbitrary graphs, subgraph vH ($v \in V(G)$) is isomorphic to H , and subgraph $K_{(v,u)}$ ($v, u \in V(G)$) is isomorphic to graph $K_{n,n}$, where $n = |V(H)|$.

We begin our considerations with strong edge-colorings of lexicographic products of graphs in special cases.

Lemma 1. For any graphs P_n ($n \geq 4$) and H , we have

$$\chi'_s(P_n \cdot H) = 2\chi'_s(H) + 3|V(H)|^2.$$

Proof. Let $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and $E(P_n) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$. For strong edge-coloring of each subgraph v_iH ($1 \leq i \leq n$) we need at least $\chi'_s(H)$ colors, and $|V(H)|^2$ colors for strong edge-coloring of each subgraph $K_{(v_i, v_j)}$ ($(v_i, v_j) \in P_n$). Consider subgraphs $v_2H, v_3H, K_{(v_1, v_2)}, K_{(v_2, v_3)}$, and $K_{(v_3, v_4)}$. Edges from $K_{(v_1, v_2)}, K_{(v_2, v_3)}$, and $K_{(v_3, v_4)}$ are at distance 0 or 1 from each other and from edges in v_2H and v_3H . Also, edges from v_2H are at distance 1 from edges in v_3H . Thus, it follows that $\chi'_s(P_n \cdot H) \geq 2\chi'_s(H) + 3|V(H)|^2$.

To complete the proof of the theorem, we construct a strong edge-coloring for $P_n \cdot H$ that uses $2\chi'_s(H) + 3|V(H)|^2$ colors. Let ϕ_P be a strong edge-coloring of P_n with colors $\{1, 2, 3\}$.

We define edge-coloring ϕ as follows: For each i ($1 \leq i \leq n$), we color v_iH using colors $\{1, 2, \dots, \chi'_s(H)\}$ if i is odd, and using colors

$\{\chi'_s(H) + 1, \chi'_s(H) + 2, \dots, 2\chi'_s(H)\}$ if i is even; For each $i(1 \leq i \leq n - 1)$, we color $K_{(v_i, v_{i+1})}$ using colors

$$\begin{aligned} & \{2\chi'_s(H) + (\phi_P((v_i, v_{i+1})) - 1)|V(H)|^2 + 1, 2\chi'_s(H) + \\ & + (\phi_P((v_i, v_{i+1})) - 1)|V(H)|^2 + 2, \dots, 2\chi'_s(H) + \\ & + \phi_P((v_i, v_{i+1}))|V(H)|^2\}. \end{aligned}$$

Clearly, ϕ is a strong edge-coloring for graph $P_n \cdot H$ and uses $2\chi'_s(H) + 3|V(H)|^2$ colors. \square

Lemma 2. For any graph H , we have

$$\chi'_s(C_5 \cdot H) = 5|V(H)|^2.$$

Proof. Let $V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ and $E(C_5) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$. Consider subgraphs $K_{(v_i, v_j)}$ ($(v_i, v_j) \in E(C_5)$) of graph $C_5 \cdot H$. Since edges from all subgraphs $K_{(v_i, v_j)}$ ($(v_i, v_j) \in E(C_5)$) are at distance 0 or 1 from each other, it follows that $\chi'_s(C_5 \cdot H) \geq 5|V(H)|^2$.

Constructing a strong edge-coloring for graph $C_5 \cdot H$ with $5|V(H)|^2$ colors will complete the proof of the theorem. Let us define an edge-coloring ϕ for graph $C_5 \cdot H$ as follows: color subgraphs $K_{(v_i, v_j)}$ ($(v_i, v_j) \in E(C_5)$) using $5|V(H)|^2$ colors; color subgraph v_1H using colors of subgraph $K_{(v_3, v_4)}$; color subgraph v_2H using colors of subgraph $K_{(v_4, v_5)}$; color subgraph v_3H using colors of subgraph $K_{(v_5, v_1)}$; color subgraph v_4H using colors of subgraph $K_{(v_1, v_2)}$; color subgraph v_5H using colors of subgraph $K_{(v_2, v_3)}$.

It is easy to verify that ϕ is a strong edge-coloring for graph $C_5 \cdot H$ and uses $5|V(H)|^2$ colors.

We continue our considerations with general bounds on strong chromatic index of lexicographic products of graphs.

Theorem 1. For any graphs G and H , we have

$$\chi'_s(G)|V(H)|^2 \leq \chi'_s(G \cdot H) \leq \chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2.$$

Moreover, the bounds are sharp.

Proof. Let $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. First of all let us note that subgraphs $K_{(v_i, v_j)}$ and $K_{(v_k, v_l)}$ ($(v_i, v_j), (v_k, v_l) \in E(G)$) can be colored with the same colors, only if there exists a strong edge-coloring ϕ_G for graph G , such that $\phi_G((v_i, v_j)) = \phi_G((v_k, v_l))$. Thus, it follows that $\chi'_s(G \cdot H) \geq \chi'_s(G)|V(H)|^2$.

Constructing a strong edge-coloring for graph $G \cdot H$ that uses $\chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2$ colors will prove the upper bound. Let f_G be a proper vertex coloring for graph G with colors $\{1, 2, \dots, \chi(G)\}$ and ϕ_G be a strong edge-coloring for graph G with colors $\{1, 2, \dots, \chi'_s(G)\}$. Let us note that edges from subgraphs v_iH and v_jH ($v_i, v_j \in V(G)$) can be assigned the same colors if $f_G(v_i) = f_G(v_j)$. Also, each subgraph v_iH ($v_i \in V(G)$) can be colored using $\chi'_s(H)$ colors and each subgraph $K_{(v_i, v_j)}$ ($(v_i, v_j) \in E(G)$) requires $|V(H)|^2$ colors for strong edge-coloring.

Now we are able to define an edge-coloring ϕ as follows: For each edge $(v_i, v_j) \in E(G)$, we color edges in subgraph $K_{(v_i, v_j)}$ using colors $\{(\phi_G((v_i, v_j)) - 1)|V(H)|^2 + 1, (\phi_G((v_i, v_j)) - 1)|V(H)|^2 + 2, \dots, \phi_G((v_i, v_j))|V(H)|^2\}$.

For each vertex $v_i \in V(G)$, we color edges in subgraph v_iH using colors

$$\{\chi'_s(G)|V(H)|^2 + (f_G(v_i) - 1)\chi'_s(H) + 1, \chi'_s(G)|V(H)|^2 + (f_G(v_i) - 1)\chi'_s(H) + 2, \chi'_s(G)|V(H)|^2 + f_G(v_i)\chi'_s(H)\}.$$

Clearly, ϕ is a strong edge-coloring for graph $G \cdot H$ with $\chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2$ colors.

The sharpness of lower and upper bounds follows from Lemma 2 and Lemma 1.

Figure 2 illustrates the strong edge-coloring ϕ of $P_4 \cdot P_3$ described in the proof of Theorem 1.

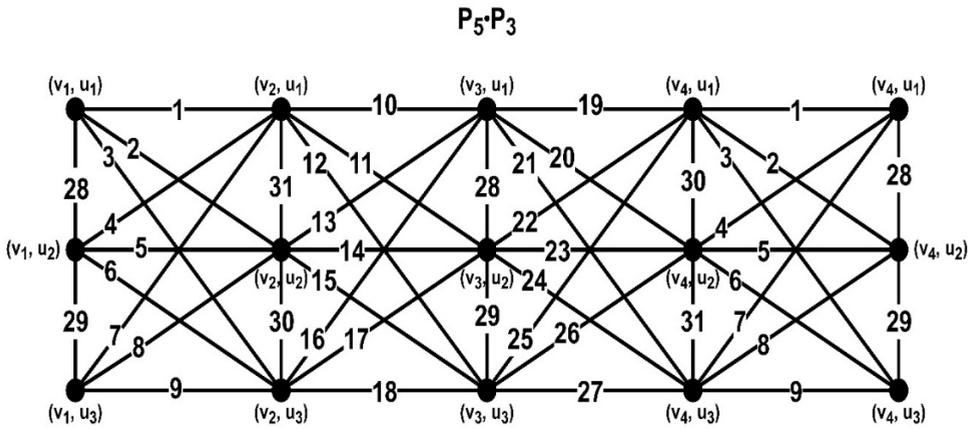


Figure 2. The strong edge-coloring of $P_5 \bullet P_3$ with 31 colors.

Conclusion

Our study began with an analysis of the strong edge-colorings of the lexicographic products of graphs in special cases. Lemmas 1 and 2 established the exact value of strong chromatic index of lexicographic products of graphs, when first component of the product is a path, and cycle of length 5, respectively. Next, Theorem 1 completed our study of lexicographic products of graphs, by deriving sharp upper and lower bounds in general cases.

REFERENCES

1. West D.B. Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey (2001).
2. Fouquet J.L. and Jolivet J.L. Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons. *Ars Combinatoria* 16 (A), 1983. PP. 141–150.
3. Andersen L.D. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Mathematics*, 108 (1–3), 1992. PP. 231–252.
4. Horák P., Qing H., and Trotter W. T. Induced matchings in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 17 (2), 1993, PP. 151–160.
5. Cranston D.W. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Mathematics*, 306(21), 2006. PP. 2772–2778.
6. Huang M., Santana M., and Yu G. Strong chromatic index of graphs with maximum degree four. *Electronic Journal of Combinatorics* 25 (3), 2018. PP. 3–31.

7. Chung F. R. K., Gyárfás A., Trotter W. T., and Tuza Z. The maximum number of edges in $2K_2$ -free graphs of bounded degree. *Discrete Mathematics*, 81(2), 1990. PP. 129–135.
8. Bruhn H., and Joos, F. A stronger bound for the strong chromatic index. *Combinatorics, Probability and Computing*, 27 (1), 2018. PP. 21–43.
9. Hurley, Eoin, Rémi de Joannis de Verclos, and Kang R. J. An improved procedure for colouring graphs of bounded local density. In *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. PP. 135–148.
10. Hausdorff F. *Grundzüge der mengenlehre*. von Veit; 1914.
11. Yang, C. and Xu, J.M. Connectivity of lexicographic product and direct product of graphs. *Ars Comb.*, 111, 2013. PP. 3–12.
12. Tian, S. and Chen, P. Edge-coloring of generalized lexicographic product of graphs. *AIMS Mathematics*, 9 (6), 2024. PP. 15988–15995.
13. Togni O. Strong chromatic index of products of graphs, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Vol. 9, 2007. PP. 47–56.

О СИЛЬНОМ ХРОМАТИЧЕСКОМ ИНДЕКСЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

А.К. Драмбян

Российско-Армянский (Славянский) университет

АННОТАЦИЯ

Сильная реберная раскраска графа G – это отображение $\phi: E(G) \rightarrow N$, такое, что любые два ребра на расстоянии 0 или 1 получают разные цвета. Минимальное количество цветов, необходимое для такого раскрашивания, называется сильным хроматическим индексом графа G и обозначается как $\chi'_s(G)$. В данной работе исследуется сильный хроматический индекс лексикографического произведения графов $G \cdot H$. В частности, мы получаем точные нижние и верхние границы для $\chi'_s(G \cdot H)$.

Ключевые слова: реберная раскраска, сильная реберная раскраска, сильный хроматический индекс, лексикографическое произведение.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-26-32
УДК 519.17

Поступила: 19.05.2025г.
Сдана на рецензию: 19.05.2025г.
Подписана к печати: 21.05.2025г.

ON VERTEX DISTINGUISHING PROPER EDGE COLORINGS OF THE CARTESIAN SUM OF GRAPHS

T. Petrosyan

Russian-Armenian (Slavonic) University
petrosyan.tigran@rau.am
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0825-3999>

ABSTRACT

A proper edge coloring of a graph G is a mapping $f: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges $e, e' \in E(G)$. A proper edge coloring f of a graph G is called vertex distinguishing if for any different vertices $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$, where $S(v, f) = \{f(e) \mid e = vw \in E(G)\}$. The minimum number of colors required for a vertex distinguishing proper coloring of a graph G is denoted by $\chi'_{vd}(G)$ and called the vertex distinguishing chromatic index of G . In this work, we provide an upper bound on the vertex distinguishing chromatic index of the Cartesian sum of graphs.

Keywords: edge-coloring, vertex distinguishing edge-coloring, vertex distinguishing chromatic index, cartesian sum of graphs.

Introduction

All graphs discussed in this paper are finite, undirected, and contain neither loops nor multiple edges. For terminologies and notations not defined here, we primarily refer to West's book [1]. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges of a graph G , respectively. The degree of a vertex $v \in V(G)$ is denoted by $d_G(v)$ and the maximum degree of G by

$\Delta(G)$. A proper edge coloring of a graph G is a mapping $f: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges $e, e' \in E(G)$. If f is a proper edge coloring of a graph G and $v \in V(G)$, then the *spectrum of a vertex v* , denoted by $S(v, f)$, is the set of all colors appearing on edges incident to v . We use the standard notations P_n , K_n and $K_{m,n}$ for the simple path, the complete graph on n vertices and the complete bipartite graph with m vertices in one part and n vertices in the other part of the bipartition, respectively.

The proper edge coloring f of a graph G is a vertex distinguishing proper coloring (abbreviated *VDP-coloring*) of G if $S(u, f) \neq S(v, f)$ for any two distinct vertices u and v in G . The minimum number of colors required for a *VDP-coloring* of a graph G without isolated edges and with at most one isolated vertex is called the vertex distinguishing chromatic index (abbreviated *VDP-chromatic index*) and denoted by $\chi'_{vd}(G)$. The concept of vertex distinguishing proper edge colorings of graphs was introduced by Burriss and Schelp in [2] and, independently, as observability of a graph, by Cerný, Hornák and Soták [3]. In [2-6], the vertex distinguishing proper edge colorings of paths, cycles, complete, complete bipartite and multipartite graphs were investigated. In particular, the authors determined the vertex distinguishing chromatic index of some families of graphs. The following results have been proved by Burriss and Schelp [2].

Theorem 1. If $n \geq 3$, then

$$\chi'_{vd}(K_n) = \begin{cases} n, & \text{if } n \text{ is odd,} \\ n + 1, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

Theorem 2. Let m and n be any natural numbers. Then

$$\chi'_{vd}(K_{m,n}) = \begin{cases} n + 1, & \text{если } n > m \geq 2, \\ n + 2, & \text{если } n = m \geq 2. \end{cases}$$

The classical theorem by Konig [7] on proper edge coloring of bipartite graphs states the following.

Theorem 3. For any bipartite graph G , we have

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

For any graphs G and H , let $G \circ H$ be the lexicographic product of G and H . The vertex set of $G \circ H$ is $V(G) \times V(H)$ and the edge set is defined below:

$$E(G \circ H) = \{(x, x')(y, y') \mid xy \in E(G) \text{ or } x = y \text{ and } x'y' \in E(H)\}$$

In [8], Baril, Kheddouci and Togni investigated vertex distinguishing proper edge colorings of Cartesian, direct, strong and lexicographic products of graphs. They derived upper bounds on the vertex distinguishing chromatic index of these products of graphs in terms of the vertex distinguishing chromatic indices of the factors. The following result has been proved by Baril, Kheddouci and Togni in [8].

Theorem 4. For any two connected graphs G and H different from K_2 , we have

$$\chi'_{vd}(G \circ H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1) \chi'(G)$$

For any graphs G and H , the Cartesian sum of G and H , denoted by $G \oplus H$, has the vertex set $V(G) \times V(H)$ and edge set

$$E(G \oplus H) = \{(x, x')(y, y') \mid xy \in E(G) \text{ or } x'y' \in E(H)\}$$

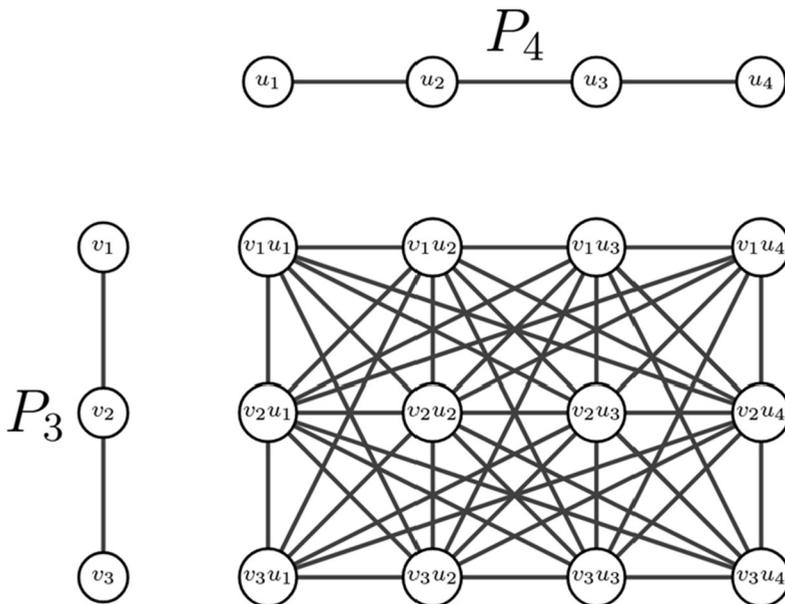


Figure 1. The Cartesian sum of P_3 and P_4 .

This notion of graph product was introduced by Ore [9] in 1962.

In this work, we give an upper bound on the vertex distinguishing chromatic index of the Cartesian sum of graphs.

Main Result

Theorem 5. For any simple graphs G and H without isolated edges and with at most one isolated vertex, we have

$$\chi'_{vd}(G \oplus H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1) \chi'(G) + \chi'(\bar{G}) \cdot \Delta(H)$$

Proof. Let G and H be graphs with vertex sets $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ respectively, such that they are not isomorphic to K_2 . Note that for any vertex $v_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq n$), the subgraph of the graph $G \oplus H$ induced by the vertices $(v_i, u_1), (v_i, u_2), \dots, (v_i, u_m)$ is isomorphic to graph H . We denote this subgraph by H_i ($1 \leq i \leq n$). Since H_i is isomorphic to H , there exists a vertex distinguishing edge coloring f_{H_i} with colors $1, 2, \dots, \chi'_{vd}(H)$ ($1 \leq i \leq n$).

Let us now define the colors of edges between different subgraphs H_i and H_j of $G \oplus H$. The subgraphs H_i and H_j are called neighboring subgraphs if $v_i v_j \in E(G)$ ($1 \leq i \leq j \leq n$). Let us denote by $W_{i,j}$ the subgraph of $G \oplus H$ formed by the vertex set $V(H_i) \cup V(H_j)$ and the edge set $\{uv : u \in V(H_i) \text{ and } v \in V(H_j)\}$.

When H_i and H_j are neighboring subgraphs, $W_{i,j}$ is isomorphic to the complete bipartite graph $K_{m,m}$. The edge set of $K_{m,m}$ can be partitioned into m perfect matchings. For each subgraph $W_{i,j}$, let us choose one of the m perfect matchings and apply the subgraph contraction operation. The resulting subgraph is isomorphic to graph G , hence there exists a vertex distinguishing edge coloring f_G with colors $\chi'_{vd}(H) + 1, \chi'_{vd}(H) + 2, \dots, \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G)$ for the subgraph. For the edges of the perfect matching, we use the colors resulting from their contraction. For each of the remaining $m - 1$ perfect matchings, we also apply the contraction operation. The resulting subgraph is isomorphic to G , meaning that there

exists a proper edge coloring with $\chi'(G)$ colors. Therefore, the edges of the remaining $m - 1$ perfect matchings can be colored with colors $\chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G) + 1, \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G) + 2, \dots, \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G) + (m - 1) \cdot \chi'(H)$ in such a way that all the edges incident to the same vertex of matchings are colored differently.

Finally, let us consider the pairs of subgraphs H_i and H_j in $G \oplus H$, which are not neighbors. Note that $W_{i,j}$ is a bipartite graph whose maximum degree is $\Delta(H)$, so by Konig's famous theorem, there exists a proper edge coloring of $W_{i,j}$ which uses exactly $\Delta(H)$ colors. Since H_i and H_j are not neighboring graphs, we have $v_i v_j \notin E(G)$, or equivalently, $v_i v_j \notin E(\bar{G})$. Let $f_{\bar{G}}$ be a proper edge coloring of graph \bar{G} with colors $1, 2, \dots, \chi'(\bar{G})$. Denote $M = \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G) + (m - 1) \cdot \chi'(H)$. For the bipartite graph $W_{i,j}$, we use a proper edge coloring with colors $M + (f_{\bar{G}}(e) - 1) \cdot \Delta(H) + 1, M + (f_{\bar{G}}(e) - 1) \cdot \Delta(H) + 2, \dots, M + f_{\bar{G}}(e) \cdot \Delta(H) + 1$.

Since $f_{\bar{G}}$ is a proper edge coloring, we have the coloring of the subgraph $W_{i,j}$ is also a proper edge coloring.

Note that the described coloring uses the colors $1, 2, \dots, \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (m - 1) \chi'(G) + \chi'(\bar{G}) \cdot \Delta(H)$. Let us denote the described coloring by $f_{G \oplus H}$ and show that for any different vertices $w, z \in V(G \oplus H)$, we have

$$S(w, f_{G \oplus H}) \neq S(z, f_{G \oplus H}).$$

Consider the following two cases:

Case 1. $w, z \in H_i (1 \leq i \leq n)$

According to the definition of the coloring $f_{G \oplus H}$, we have

$$\begin{aligned} S(w, f_{G \oplus H}) \cap \{1, 2, \dots, \chi'_{vd}(H)\} &= S(w, f_{H_i}) \text{ and} \\ S(z, f_{G \oplus H}) \cap \{1, 2, \dots, \chi'_{vd}(H)\} &= S(z, f_{H_i}). \end{aligned}$$

Since f_{H_i} is a vertex distinguishing edge coloring, we have $S(w, f_{H_i}) \neq S(z, f_{H_i})$, hence $S(w, f_{G \oplus H}) \neq S(z, f_{G \oplus H})$.

Case 2. $w \in H_i, z \in H_j (1 \leq i < j \leq n)$

By the definition of $f_{G \oplus H}$, we have $S(w, f_{G \oplus H}) \cap \{\chi'_{vd}(H) + 1, \chi'_{vd}(H) + 2, \dots, \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G)\} = S(v_i, f_G)$ and $S(z, f_{G \oplus H}) \cap \{\chi'_{vd}(H) + 1, \chi'_{vd}(H) + 2, \dots, \chi'_{vd}(H) + \chi'_{vd}(G)\} = S(v_j, f_G)$.

Since f_G is a vertex distinguishing edge coloring and $v_i \neq v_j \in V(G)$, we have $S(v_i, f_G) \neq S(v_j, f_G)$, therefore $S(w, f_{G \oplus H}) \neq S(z, f_{G \oplus H})$.

Conclusion

In our study, we established an upper bound for vertex distinguishing chromatic index of a cartesian sum of graphs, using the chromatic parameters of the individual graphs.

REFERENCES

1. West D.B. Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey (2001).
2. Burris, A.C. Vertex-distinguishing edge-colorings. Ph.D. Dissertation, Memphis State University (1993).
3. Burris, A.C., Schelp, R.H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. J. Graph Theory 26. PP. 73–82 (1997).
4. Cerný J., Horňák M., Soták R. Observability of a graph. Math. Slovaca 46. PP. 21–31 (1996).
5. Horňák, M., Soták, R. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. Ars Comb. 41. PP. 289–301 (1995).
6. Horňák, M., Soták, R. Asymptotic behavior of the observability of Q_n . Discrete Math. 176. PP. 139–148 (1997).
7. Kőnig Dénes, Gráfok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére, Matematikai és Természettudományi Értesítő, vol. 34. PP. 104–119 (1916).
8. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Vertex distinguishing edge- and total-colorings of Cartesian and other product graphs, Ars Combinatoria, vol. 107. PP. 109–127 (2012).
9. Ore, Oystein. Theory of graphs, Colloquium Publications. American Mathematical Society (1962).

**ВЕРШИННО-РАЗЛИЧАЮЩИЕ РЕБЕРНЫЕ РАСКРАСКИ
ДЕКАРТОВЫХ СУММ ГРАФОВ**

Т.К. Петросян

Российско-Армянский (Славянский) университет

АННОТАЦИЯ

Для графа G функция $f: E(G) \rightarrow N$ называется рёберной раскраской графа G . Рёберная раскраска f графа G называется правильной, если для любых смежных рёбер $e, e' \in E(G), f(e) \neq f(e')$. Если f – правильная раскраска графа G и $v \in V(G)$, то обозначим через $S(v, f)$ множество цветов рёбер, инцидентных вершин v . Правильная раскраска f графа G называется вершинно-различающей, если для любых различных вершин $u, v \in V(G), S(u, f) \neq S(v, f)$. Наименьшее число цветов, необходимое для вершинно-различающей рёберной раскраски графа G , называется вершинно-различающим хроматическим индексом и обозначается $\chi'_{va}(G)$. В данной работе найдена верхняя оценка вершинно-различающего хроматического индекса декартовых сумм графов.

Ключевые слова: реберная раскраска, сильная реберная раскраска, сильный хроматический индекс, декартова сумма графов.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-33-40
УДК 519.17

Поступила: 03.06.2025г.
Сдана на рецензию: 03.06.2025г.
Подписана к печати: 09.05.2025г.

О СИЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ РАСКРАСКАХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

П.А. Петросян^{1,2}, А.К. Драмбян²

¹Ереванский государственный университет
²Российско-Армянский (Славянский) университет
petros_petrosyan@ysu.am, ardrambyan@gmail.com
ORCID: ¹<https://orcid.org/0000-0001-7070-1417>,
²<https://orcid.org/0009-0002-2691-6976>

АННОТАЦИЯ

Сильной реберной раскраской графа G называется отображение $\phi: E(G) \rightarrow N$, при котором любые два ребра, находящиеся на расстоянии меньше двух, получают различные цвета. Минимальное количество цветов, необходимое для такого раскрашивания, называется «сильным хроматическим индексом графа G » и обозначается как $\chi'_s(G)$. В 1993 году Брюальди и Масси выдвинули гипотезу о том, что для любого двудольного графа G справедливо неравенство $\chi'_s(G) \leq ab$, где a – максимальная степень вершины в одной доле, а b – максимальная степень вершины в другой доле. В данной работе доказывается справедливость этой гипотезы для регулярных двудольных графов G при $\Delta(G) \leq 5$, а также для ряда би-регулярных двудольных графов, обладающих особой факторизацией.

Ключевые слова: реберная раскраска, сильная реберная раскраска, сильный хроматический индекс, двудольные графы.

Введение

В данной работе рассматриваются только конечные графы. Для не определенных в этой работе понятий и обозначений мы используем

книгу Уеста [1]. Множество вершин и множество ребер графа G обозначается через $V(G)$ и $E(G)$, соответственно. Степень вершины $v \in V(G)$ обозначается через $d_G(v)$, а максимальная из степеней вершин графа G – как $\Delta(G)$. Хроматическое число графа G обозначается через $\chi(G)$. Подграф графа G , порожденный вершинами $V' \subseteq V(G)$, обозначается через $G[V']$. Граф называется *регулярным*, если степени всех вершин равны. Граф G называется *двудольным*, если $V(G)$ можно разбить на две части так, что каждое ребро соединяет вершину из одной части с вершиной другой части (доли). В дальнейшем мы будем использовать обозначение (X, Y, E) для двудольного графа G , где X и Y доли графа G , а E – множество ребер G . Скажем, что двудольный граф $G = (X, Y, E)$ является (a, b) -двудольным, если максимальная степень вершины из X равняется a , а максимальная степень вершины из Y равняется b . (a, b) -двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется *бирегулярным*, если все степени вершин из X равны a , и все степени вершин из Y равны b . (a, b) -двудольный граф $G = (X, Y, E)$ называется *почти бирегулярным*, если все степени вершин из X равны a , а степени вершин из Y равны a или b . Операция над графом G , при котором удаляется ребро $(v, u) \in E(G)$, и отождествляются вершины v и u , называется *стягивание ребра (v, u)* . Скажем, что граф H является *минором* графа G , если из графа G можно получить граф H удалением ребер, вершин и стягиванием ребер. *Сильной реберной раскраской* графа G называется «отображение $\phi: E(G) \rightarrow N$ », при котором любые два ребра, находящиеся на расстоянии меньше двух, получают различные цвета. Минимальное количество цветов, необходимое для такого раскрашивания, называется *сильным хроматическим индексом* графа G и обозначается как $\chi'_s(G)$. Сильные реберные раскраски ввели Фуке и Жоливье в 1983 году [2]. В 1985, во время семинара в Праге, Эрдеши и Нешетриль выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Для любого графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq \begin{cases} \frac{5}{4} \Delta(G)^2, & \text{если } \Delta(G) \text{ четное,} \\ \frac{1}{4} (5\Delta(G)^2 - 2\Delta(G) + 1), & \text{если } \Delta(G) \text{ нечетное.} \end{cases}$$

В 1992 и 1993 годах Андерсен и Хорак, независимо друг от друга, доказали, что гипотеза верна для графов G с $\Delta(G) = 3$ [3, 4]. В 2006 году Кранстон [5] доказал, что $\chi'_s(G) \leq 22$ для графов G с $\Delta(G) = 4$, а в 2018 году оценка была улучшена до $\chi'_s(G) \leq 21$ [6]. На сегодняшний день Гипотеза 1 остается открытой для графов G с $\Delta(G) \geq 4$. Также известно, что $\chi'_s(G) \leq 1.772\Delta(G)^2$ для графов G с достаточно большим $\Delta(G)$ [7]. В 1993 году Брюальди и Масси выдвинули следующую гипотезу о сильных реберных раскрасках двудольных графов.

Гипотеза 2. Для любого (a, b) -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq ab.$$

Гипотезу 2 удалось доказать только в следующих частных случаях [8, 9].

Теорема 1 (Накпрасит). Для любого $(2, r)$ -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 2r.$$

Теорема 2 (Хуанг, Ю, Жоу). Для любого $(3, r)$ -двудольного графа G справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 3r.$$

Основные результаты

Вначале мы рассмотрим сильные реберные раскраски регулярных двудольных графов, максимальная степень которых не превосходит 5.

Определение 1. Подмножество ребер M графа G называется паросочетанием, если любые два ребра из M не имеют общей вершины.

Определение 2. Паросочетание M графа G называется совершенным, если ребра из M покрывают все вершины G .

Теорема 3. Для любого регулярного двудольного графа G , для которого $K_{\Delta(G)+1}$ не является минором и $\Delta(G) \leq 5$, имеет место следующее неравенство:

$$\chi'_S(G) \leq \Delta(G)^2.$$

Доказательство. Поскольку G является регулярным двудольным графом, существуют $M_1, M_2, \dots, M_{\Delta(G)}$ совершенные паросочетания – такие, что для любой пары $1 \leq i \neq j \leq \Delta(G)$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ и $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{\Delta(G)} = E$. Рассмотрим графы G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$), которые получаются из графа G – стягиванием ребер из M_i . Для ребра $(x, y) \in M_i$ ($1 \leq i \leq \Delta(G)$), обозначим через $v_{(x,y)}$ вершину графа G_i , которое образуется стягиванием ребра (x, y) . Так как $K_{\Delta(G)+1}$ не является минором G , $K_{\Delta(G)+1}$, также не является минором для G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$). Из результатов о правильных вершинных раскрасках [10, 11] следует, что для любого графа G_i ($1 \leq i \leq \Delta(G)$) существует правильная вершинная раскраска f_i цветами $1, 2, \dots, \Delta(G)$.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: ребро $(x, y) \in M_i$ ($1 \leq i \leq \Delta(G)$) красим цветом $\Delta(G)(i - 1) + f_i(v_{(x,y)})$.

Рассмотрим произвольные ребра $(x, y), (x', y') \in E$ – такие, что $\phi((x, y)) = \phi((x', y'))$. Очевидно, что ребра (x, y) и (x', y') принадлежат одному паросочетанию M_k ($k \in [1, \Delta(G)]$). Из построения ϕ следует, что $f_k(v_{(x,y)}) = f_k(v_{(x',y')})$. Получаем, что $d_{G_k}(v_{(x,y)}, v_{(x',y')}) \geq 2$. Следовательно, ребра (x, y) и (x', y') также находятся на расстоянии не менее 2 в графе G . Так как выбор ребер (x, y) и (x', y') был произвольным, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $\Delta(G)^2$ цветов.

Далее, рассмотрим сильные реберные раскраски двудольных графов, которые обладают особой факторизацией. Для следующей леммы нам понадобится классический результат из теории факторизаций.

Определение 3. Граф G называется «псевдографом», если в нем допускаются кратные ребра и петли (ребра соединяющие вершину с собой).

Теорема 4 (Петерсен). Любой $2r$ -регулярный псевдограф G разлагается на r непересекающихся 2-факторов.

Лемма 1. Для любого $(2, 2r)$ -почти бирегулярного двудольного графа $G = (X, Y, E)$ существует разложение на F_1, F_2, \dots, F_r подграфы – такое, что:

- a) $E(F_1) \cup E(F_2) \cup \dots \cup E(F_r) = E(G)$,
- b) Для любой пары $1 \leq i \neq j \leq r$, $E(F_i) \cap E(F_j) = \emptyset$,
- c) Для любого $1 \leq i \leq r$, F_i является 2-регулярным,
- d) Для любого $1 \leq i \leq r$, $F_i = G[V(F_i)]$.

Доказательство. Рассмотрим $2r$ -регулярный псевдограф G' , который получается из G – добавлением петель. По Теореме 4, граф G' разлагается на F'_1, F'_2, \dots, F'_r 2-факторы. Легко заметить, что для любой вершины $v \in V(G')$, где $d_G(v) = 2$ – смежные ребра v , отличные от петель, принадлежат одному и тому же 2-фактору, и более того – одной и той же компоненте связности из этого 2-фактора.

Построим подграфы F_i ($1 \leq i \leq r$) графа G из 2-факторов F'_i – удаляя петли и появившиеся изолированные вершины.

Очевидно, что подграфы F_1, F_2, \dots, F_r удовлетворяют условиям леммы a), b), и c). Обоснуем, что условие d) также выполняется. Пусть $F_i = (X_i, Y_i, E_i)$, $1 \leq i \leq r$. Так как все смежные ребра любой вершины $x \in X_i$ ($1 \leq i \leq r$) принадлежат подграфу F_i , подграф, порожденный вершинами $X_i \cup Y_i$, совпадает с F_i .

Лемма 2. Для любого $(2, 2r)$ -почти бирегулярного графа $G = (X, Y, E)$ справедливо неравенство:

$$\chi'_s(G) \leq 4r.$$

Доказательство. Для графа G существует разложение на подграфы F_1, F_2, \dots, F_r , удовлетворяющие условиям Леммы 1. Так как F_i ($1 \leq i \leq r$) 2-регулярен, для него существует сильная реберная раскраска 4 цветами.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: для каждого числа i ($1 \leq i \leq r$), красим F_i используя цвета $4(i - 1) + 1, 4(i - 1) + 2, 4(i - 1) + 3, 4i$.

Рассмотрим произвольные ребра $(x, y), (x', y') \in E(G)$ – такие, что $\phi((x, y)) = \phi((x', y'))$. По построению ϕ , эти ребра принадлежат одному и тому же подграфу F_k ($k \in [1, r]$). Если в графе G существует ребро (x, y') или ребро (x', y) , то, по условию d) Леммы 1, это ребро также принадлежит подграфу F_k , что противоречит построению раскраски для данного подграфа. Следовательно, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $4r$ цвета.

Результат Леммы 2 также следует из Теоремы 1, однако, в отличие от доказательства Теоремы 1, доказательство Леммы 2 предлагает полиномиальный алгоритм для построения сильных реберных раскрасок $(2, 2r)$ -почти бирегулярных графов.

Теорема 5. *Для любого $(2l, 2r)$ -бирегулярного графа G , который разлагается на r $(2l, 2)$ -бирегулярных подграфов, справедливо неравенство:*

$$\chi'_s(G) \leq 4lr.$$

Доказательство. Пусть G_1, G_2, \dots, G_r $(2l, 2)$ -бирегулярные подграфы являются разложением G . По Лемме 2, для каждого подграфа G_i ($1 \leq i \leq r$) существует сильная реберная раскраска в $2l$ цвета.

Определим реберную раскраску ϕ графа G следующим образом: каждый подграф G_i ($1 \leq i \leq r$) красим используя цвета $2l(i-1) + 1, 2l(i-1) + 2, \dots, 2li$.

Так как для каждого подграфа используется сильная реберная раскраска непересекающимися цветами, и любой путь, соединяющий ребра из одного подграфа и проходящий через ребра других подграфов, имеет длину не менее 2, ϕ является сильной реберной раскраской графа G и использует $4lr$ цветов.

Заключение

Вначале мы показали верхнюю оценку для сильного хроматического индекса регулярных двудольных графов, когда максимальная степень не превосходит 5. Далее, мы рассмотрели разложение $(2, 2r)$

почти бирегулярных графов на подграфы и построили сильные реберные раскраски для $(2, 2r)$ -почти бирегулярных графов, используя полученное свойство. В конце мы установили верхнюю оценку для сильного хроматического индекса $(2l, 2r)$ -бирегулярных графов, обладающих особой факторизацией. Полученные в данной работе результаты подтверждают гипотезу Брюальди-Масси в ряде частных случаев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *West D.* Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
2. *Fouquet J. L. and Jolivet J. L.* Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons. *Ars Combinatoria* 16(A), 1983. PP. 141–150.
3. *Andersen L.* The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Mathematics*, 108 (1–3), 1992. PP. 231–252.
4. *Horák P., Qing H. and Trotter W.* Induced matchings in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 17 (2), 1993. PP. 151–160.
5. *Cranston D.* Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Mathematics*, 306 (21), 2006. PP. 2772–2778.
6. *Huang M., Santana M. and Yu G.* Strong chromatic index of graphs with maximum degree four. *Electronic Journal of Combinatorics* 25 (3), 2018. PP. 3–31.
7. *Hurley E., Rémi de Joannis de Verclos and Kang R.* An improved procedure for colouring graphs of bounded local density. In *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. PP. 135–148.
8. *Nakprasit K.* A note on the strong chromatic index of bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 308 (16), 2008. PP. 3726–3728.
9. *Huang M., Yu G., Zhou X.* The strong chromatic index of $(3, \Delta)$ -bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 340 (5), 2017. PP. 1143–1149
10. *Appel K., Haken W.* Every planar map is four colorable. *American Mathematical Society*, 98, 1989.
11. *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* Hadwiger’s conjecture for K_6 -free graphs. *Combinatorica*, 13 (3), 1993. PP. 279–361.

ON STRONG EDGE-COLORINGS OF BIPARTITE GRAPHS*P. Petrosyan^{1,2}, A. Drambyan²*¹*Yerevan State University*²*Russian-Armenian (Slavonic) University***ABSTRACT**

A strong edge coloring of a graph G is a mapping $\phi: E(G) \rightarrow N$ such that any two edges at distance less than two receive distinct colors. The minimum number of colors required for such a coloring is called the strong chromatic index of G and denoted by $\chi'_s(G)$. In 1993, Brualdi and Massey conjectured that for any bipartite graph G holds $\chi'_s(G) \leq ab$, where a is the maximum vertex degree in one partition, and b is the maximum vertex degree in the other partition. In this paper we prove the validity of the conjecture for regular bipartite graphs G with $\Delta(G) \leq 5$ and for biregular bipartite graphs with special factorizations.

Keywords: edge-coloring, strong edge-coloring, strong chromatic index, bipartite graphs.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-41-52
УДК 519.17

Поступила: 04.06.2025г.
Сдана на рецензию: 04.06.2025г.
Подписана к печати: 09.05.2025г.

ВЕРШИННО-РАЗЛИЧАЮЩИЕ РЕБЕРНЫЕ РАСКРАСКИ ОДНОГО КЛАССА ГРАФОВ

П.А. Петросян^{1,2}, Т.К. Петросян²

*Ереванский государственный университет¹
Российско-Армянский (Славянский) университет²
petrosyan.petros@gmail.com, petrosyan.tigran@rau.am*

АННОТАЦИЯ

Для графа G функция $f: E(G) \rightarrow Z_{\geq 0}$ называется «реберной раскраской графа G ». Реберная раскраска f графа G называется «правильной», если для любых смежных ребер $e, e' \in E(G), f(e) \neq f(e')$. Если f – правильная реберная раскраска графа G и $v \in V(G)$, то через $S(v, f)$ обозначается множество цветов ребер, инцидентных вершине v . Правильная раскраска f графа G называется «вершинно-различающей», если для любых различных вершин $u, v \in V(G), S(u, f) \neq S(v, f)$. Наименьшее число цветов, необходимое для вершинно-различающей реберной раскраски графа G , называется «вершинно-различающим хроматическим индексом» и обозначается $\chi'_{vd}(G)$. В данной работе найдены точные значения вершинно-различающих индексов для одного класса графов.

Ключевые слова: реберная раскраска, вершинно-различающая реберная раскраска, вершинно-различающий хроматический индекс.

Введение

Все графы, рассматриваемые в данной работе, являются конечными неориентированными графами без кратных ребер и петель.

Неопределенные понятия и обозначения можно найти в [1]. Пусть G – неориентированный граф без кратных ребер и петель, $V(G)$ – множество вершин графа G , $E(G)$ – множество ребер графа G . Для графа G функция $f: E(G) \rightarrow Z_{\geq 0}$ называется правильной реберной раскраской графа G , если для любых смежных ребер $e, e' \in E(G)$, $f(e) \neq f(e')$. Минимальное количество цветов, необходимое для правильной раскраски графа G , называется *хроматическим индексом* и обозначается через $\chi'(G)$. Если f является правильной раскраской графа G и $v \in V(G)$, то через $S(v, f)$ обозначается множество цветов ребер, инцидентных вершине v , которая называется *спектром вершины v* .

Правильная реберная раскраска f графа G называется *вершинно-различающей реберной раскраской* (сокращенно: *VDP-раскраской*) графа G , если для любых двух различных вершин u и v выполняется условие $S(u, f) \neq S(v, f)$. Минимальное количество цветов, необходимое для *VDP* –раскраски графа G , не содержащего изолированных ребер или более одной изолированной вершины, называется *вершинно-различающим хроматическим индексом* (сокращенно *VDP* –хроматическим индексом) и обозначается через $\chi'_{vd}(G)$.

Определение вершинно-различающей реберной раскраски графа было введено в [2,3] и, независимо, как «наблюдаемость» графа в [4–6].

Если для данного графа G существует вершинно-различающая реберная k –раскраска, тогда для любого числа $1 \leq d \leq \Delta(G)$, имеет место неравенство $\binom{n}{k} \geq n_d$, где n_d – это количество вершин со степенью d . Сделаем следующее обозначение

$$\pi(G) = \min \left\{ k : \binom{n}{k} \geq n_d \text{ для любого } 1 \leq d \leq \Delta(G) \right\}.$$

Понятно, что для вершинно-различающей реберной раскраски графа G нужно использовать, как минимум, $\pi(G)$ цветов. В работе [3] Баррис и Шелп предложили следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Если для графа G существует вершинно-различающая реберная раскраска, тогда имеет место следующее неравенство

$$\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1.$$

Гипотеза была доказана для полных и полных двудольных графов, для объединения путей, а также для некоторых других классов графов.

Основные результаты

В работе [7] были рассмотрены три типа обобщения для специального класса графов. Для любых натуральных чисел $k, n \geq 2$ и l обозначим через $W'(k, n, l)$ раф, состоящий из n копий полного графа K_k , вершины которых соединены с вершинами полного графа K_l , называемыми *центральной вершинами*. Граф $W'(k, n, 1)$ принято обозначать как $W(k, n)$.

Прежде всего, нами найдено точное значение $\chi'_{vd}(W(k, n))$ для произвольных натуральных чисел $k, n \geq 2$.

Теорема 1. Для любых натуральных чисел $k, n \geq 2$ имеет место следующее:

- $\chi'_{vd}(W(2, 2)) = 5$,
- $\chi'_{vd}(W(k, n)) = k \cdot n$, если $k > 2$ или $n > 2$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что любая вершинно-различающая реберная раскраска графа $W(k, n)$, использует не менее чем $n \cdot k$ цветов. По определению $W(k, n)$, центральная вершина графа соединена с $n \cdot k$ вершинами графа. По определению правильной раскраски, все ребра инцидентные этой вершине должны быть раскрашены в различные цвета, откуда следует, что $\chi'_{vd}(W(k, n)) \geq \chi'(W(k, n)) \geq n \cdot k$.

Обозначим через K_k^i i -ую копию графа K_k в графе $G = W(k, n)$, а через $V(K_k^i) = \{v_0^i, v_1^i, \dots, v_{k-1}^i\}$ – множество вершин графа K_k^i ($1 \leq i \leq n$). Множество вершин графа G – это множество $V(G) = V(K_k^1) \cup V(K_k^2) \cup \dots \cup V(K_k^n) \cup \{w\}$, где w – единственная центральная вершина графа G . Рассмотрим два случая.

Случай 1. $k = 2$ и $n = 2$.

Для графа $W(2,2)$ определим реберную раскраску $\phi_{W(2,2)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_{W(2,2)}(v_0^1 w) &= 0, \phi_{W(2,2)}(v_1^1 w) = 1, \phi_{W(2,2)}(v_0^2 w) = 2, \\ \phi_{W(2,2)}(v_1^2 w) &= 3, \phi_{W(2,2)}(v_0^1 v_1^1) = 2, \phi_{W(2,2)}(v_0^2 v_1^2) = 4.\end{aligned}$$

По определению $\phi_{W(2,2)}$, имеем

$$\begin{aligned}S(v_0^1, \phi_{W(2,2)}) &= \{0, 2\}, S(v_1^1, \phi_{W(2,2)}) = \{1, 2\}, S(v_0^2, \phi_{W(2,2)}) = \{2, 4\}, \\ S(v_1^2, \phi_{W(2,2)}) &= \{3, 4\}, S(w, \phi_{W(2,2)}) = \{0, 1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

$\phi_{W(2,2)}$ является вершинно-различающей реберной 5-раскраской. Легко показать, что для графа $W(2,2)$ не существует вершинно-различающей реберной раскраски, использующей меньшее количество цветов.

Случай 2. $k > 2$ или $n > 2$.

Для любого числа $1 \leq p \leq n$ определим раскраску $f_{K_k^p}$ для графа K_k^p следующим образом: для любого ребра $v_i^p v_j^p \in E(K_k^p)$, где $0 \leq i < j \leq k-1$

$$f_{K_k^p}(v_i^p v_j^p) = (p-1) \cdot k + (i+j) \bmod k.$$

По определению $f_{K_k^p}$, для произвольной вершины $v_i^p \in V(K_k^p)$, где $0 \leq i \leq k-1$

$$\begin{aligned}S(v_i^p, f_{K_k^p}) &= \{(p-1) \cdot k, (p-1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\} \\ &\quad \setminus \{(p-1) \cdot k + (2i) \bmod k\}.\end{aligned}$$

Понятно, что $f_{K_k^p}$ является правильной раскраской графа K_k^p . Далее определим раскраску f_G для графа G следующим образом: для произвольного $e \in E(G)$ и для любого числа $1 \leq p \leq n$

$$f_G(e) = \begin{cases} f_{K_k^p}(e), & \text{если } e \in E(K_k^i) \\ (p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k), & \text{если } e = wv_i^p \ (0 \leq i \leq k-1) \end{cases}$$

По определению f_G , имеем

$$\begin{aligned}\triangleright S(v_i^p, f_G) &= S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}, \text{ когда } 0 \leq i \leq k-1 \text{ и } 1 \leq \\ & p \leq n-1,\end{aligned}$$

- $S(v_i^n, f_G) = S(v_i^n, f_{K_k^p}) \cup \{i\}$, когда $0 \leq i \leq k - 1$,
- $S(w, f_G) = \{0, 1, \dots, n \cdot k - 1\}$.

Сначала покажем, что f_G является правильной раскраской. Поскольку $f_{K_k^p}$ – правильная раскраска, то достаточно показать, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$ ($0 \leq i \leq k - 1, 1 \leq p \leq n$).

Действительно, согласно определению раскраски, $S(v_i^p, f_{K_k}) \subseteq \{(p - 1) \cdot k, (p - 1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$. Если $p < n$, то $(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k) = p \cdot k + i$ и так как $i \geq 0$, получаем $p \cdot k + i > p \cdot k - 1$, откуда следует, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$. Если $p = n$, то $(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k) = i$, и поскольку $0 \leq i < k \leq (p - 1) \cdot k$, также имеем, что $\{(p \cdot k + i) \bmod (n \cdot k)\} \notin S(v_i^p, f_{K_k})$.

Теперь покажем, что для любых двух различных вершин $u, z \in V(G)$ выполняется

$$S(u, f_G) \neq S(z, f_G)$$

Логически возможны следующие подслучаи:

Случай 2.1 $u = w, z \in K_k^i$ ($1 \leq i \leq n$).

Не сложно убедиться, что $|S(u, f_G)| = n \cdot k$, а $|S(z, f_G)| = k$. Поскольку $n \geq 2$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ содержат различное количество цветов, следовательно, они не совпадают.

Случай 2.2 $u = v_i^p, z = v_j^q$ ($0 \leq i, j \leq k - 1, 1 \leq p \leq q < n, i \neq j$ или $p \neq q$).

Согласно определению раскраски f_G , имеем $S(u, f_G) = S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}$ и $S(z, f_G) = S(v_j^q, f_{K_k^q}) \cup \{q \cdot k + j\}$.

Поскольку $p \cdot k + i \neq q \cdot k + j$, то множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпасть только в том случае, если $q \cdot k + j \in S(v_i^p, f_{K_k^p})$, однако из того, что $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \subset \{(p - 1) \cdot k, (p - 1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$ и $q \cdot k + j > p \cdot k - 1$ следует, что $q \cdot k + j \notin S(v_i^p, f_{K_k^p})$.

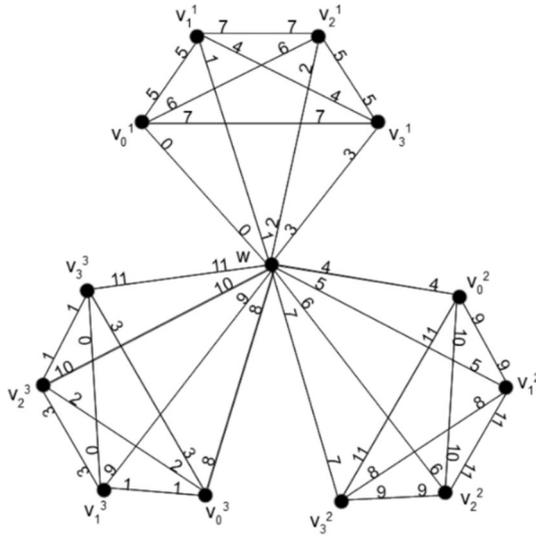


Рисунок 1. VDP-раскраска графа $W(4, 3)$ с использованием 12 цветов.

Случай 2.3 $u = v_i^p, z = v_j^n$ ($0 \leq i, j \leq k - 1, 1 \leq p < n$).

По определению f_G , $S(u, f_G) = S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cup \{p \cdot k + i\}$ и $S(z, f_G) = S(v_j^n, f_{K_k^n}) \cup \{j\}$. По определению $f_{K_k^p}$ и $f_{K_k^n}$, $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \subset \{(p - 1) \cdot k, (p - 1) \cdot k + 1, \dots, p \cdot k - 1\}$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n}) \subset \{(n - 1) \cdot k, (n - 1) \cdot k + 1, \dots, n \cdot k - 1\}$. Поскольку $p < n$, множества $S(v_i^p, f_{K_k^p})$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n})$ не пересекаются, то есть $S(v_i^p, f_{K_k^p}) \cap S(v_j^n, f_{K_k^n}) = \emptyset$. С другой стороны, $p \cdot k + i \neq j$, следовательно, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпадать только в том случае, когда $S(v_i^p, f_{K_k^p}) = j$ и $S(v_j^n, f_{K_k^n}) = \{p \cdot k + i\}$, что возможно только при $k = 2$ и $n = 2$. Однако по условию рассматриваемого случая $n > 2$ или $k > 2$, следовательно, $S(u, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Случай 2.4 $u = v_i^n, z = v_j^n$ ($0 \leq i < j \leq k - 1$).

Согласно определению, раскраски f_G , имеем:

$$S(u, f_G) = S(v_i^n, f_{K_k^n}) \cup \{i\}, S(z, f_G) = S(v_j^n, f_{K_k^n}) \cup \{j\}.$$

Поскольку $i \neq j$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ могут совпадать только в том случае, если $j \in S(v_i^n, f_{K_k^n})$. Однако это невозможно, так как $S(v_i^n, f_{K_k^n}) \subset \{(n-1) \cdot k, (n-1) \cdot k + 1, \dots, n \cdot k - 1\}$ в то время как $j < k \leq (n-1) \cdot k$. Следовательно, $j \notin S(v_i^n, f_{K_k^n})$.

Раскраска f_G использует цвета $0, 1, \dots, n \cdot k - 1$, следовательно $\chi'_{vd}(W(k, n)) = \chi'(W(k, n)) = n \cdot k$.

Теперь найдём точное значение вершинно-различающего хроматического индекса для графа $W'(k, n, l)$ в частном случае.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел k, n, l , таких что $2 \leq l < k \cdot n$, справедливо следующее равенство:

$$\chi'_{vd}(W'(k, n, l)) = k \cdot n + l.$$

Доказательство. Сперва покажем, что не существует вершинно-различающей раскраски графа $W'(k, n, l)$, использующей менее чем $k \cdot n + l$ цветов. Поскольку $l \geq 2$, центральный граф K_l содержит как минимум две вершины, каждая из которых соединена с $k \cdot n + l - 1$ вершинами. По определению вершинно-различающей реберной раскраски, спектры этих вершин не должны совпадать, поэтому необходимо использовать не менее $k \cdot n + l$ различных цветов.

Пусть дан граф $G = W'(k, n, l)$, для которого $V(G) = V_{K_l} \cup V_{K_k^1} \cup V_{K_k^2} \cup \dots \cup V_{K_k^n}$, где $V(K_l) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}\}$ – множество вершин графа K_l , а $V(K_k^p) = \{u_{(p-1) \cdot k}, u_{(p-1) \cdot k + 1}, \dots, u_{p \cdot k - 1}\}$ – множество вершин p -ой копии полного графа K_k , обозначаемой через K_k^p ($1 \leq p \leq n$).

Для каждого полного графа K_k^p ($1 \leq p \leq n$) определим правильную реберную раскраску $f_{K_k^p}$ следующим образом: для произвольного ребра $u_i u_j \in E(G)$, где $0 \leq i < j \leq n \cdot k - 1$, положим:

$$f_{K_k^p}(u_i u_j) = ([i + j + 3] \bmod k + p \cdot k + l - 1) \bmod (n \cdot k + l).$$

Согласно определению раскраски $f_{K_k^p}$, для любой вершины $u_i \in V(K_k^p)$, где $(p - 1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1$, выполняются следующие условия:

$$\triangleright S(u_i, f_{K_k^p}) \subset \{l + p \cdot k - 1, l + p \cdot k, \dots, l + (p + 1) \cdot k - 2\},$$

когда $1 \leq p \leq n - 1$,

$$\triangleright S(u_i, f_{K_k^p}) \subset \{l + n \cdot k - 1, 0, 1, \dots, k - 2\}, \text{ когда } p = n.$$

Обозначим $M_i = i \bmod (n \cdot k + l)$ и определим реберную раскраску f_G для графа G следующим образом: для каждого ребра $e \in E(G)$

$$f_G(e) = \begin{cases} i + j, & \text{если } e = v_i u_j \ (0 \leq i \leq l - 1, 0 \leq j \leq n \cdot k - 1), \\ M_{i+j+n \cdot k}, & \text{если } e = v_i v_j \ (0 \leq i < j \leq l - 1), \\ f_{K_k^p}(e), & \text{если } e \in E(K_k^p) \ (1 \leq p \leq n). \end{cases}$$

По определению f_G , имеем

$$\triangleright S(v_i, f_G) = [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2i+n \cdot k}\}, \text{ когда } 0 \leq i \leq l - 1,$$

$$\triangleright S(u_j, f_G) = S(u_j, f_{K_k^p}) \cup \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}, \text{ когда } (p - 1) \cdot k \leq j \leq p \cdot k - 1 \ (1 \leq p \leq n).$$

Покажем, что для любых различных вершин $w, z \in V(G)$ выполняется

$$S(w, f_G) \neq S(z, f_G).$$

Рассмотрим следующие три случая:

Случай 1. $w \in K_l, z \in K_k^p \ (1 \leq p \leq n)$.

Нетрудно проверить, что $|S(u, f_G)| = n \cdot k + l - 1$, а $|S(z, f_G)| = k + l$. Поскольку $n \geq 2$ и $k \geq 2$, множества $S(u, f_G)$ и $S(z, f_G)$ содержат различное количество цветов, следовательно, эти множества не совпадают.

Случай 2. $w = v_i, z = v_j \ (0 \leq i < j \leq l - 1)$.

Согласно определению раскраски f_G , имеем:

$$S(w, f_G) = [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2i+n \cdot k}\},$$

$$S(z, f_G) = [0, n \cdot k + l - 1] \setminus \{M_{2j+n \cdot k}\}.$$

Множества $S(w, f_G)$ и $S(z, f_G)$ совпадают тогда и только тогда, когда $M_{2i+n \cdot k} = M_{2j+n \cdot k}$, то есть $2i \equiv 2j \pmod{[n \cdot k + l]}$.

Поскольку $0 < j - i < l < n \cdot k$, имеем $0 < 2 \cdot (j - i) < n \cdot k + l$, откуда следует, что $2i \not\equiv 2j \pmod{[n \cdot k + l]}$.

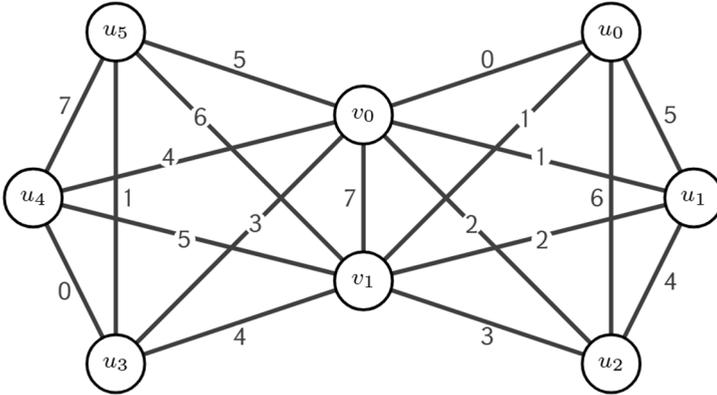


Рисунок 2. VDP-раскраска графа $W'(2, 3, 2)$ с использованием 8 цветов.

Случай 3. $w = u_i, z = u_j$ ($0 \leq i < j \leq n \cdot k - 1$).

Пусть $w \in K_k^p$ и $z \in K_k^q$ при $1 \leq p \leq q \leq n$. Согласно определению раскраски f_G , имеем:

$$S(w, f_G) = S(u_i, f_{K_k^p}) \cup \{i, i + 1, \dots, i + l - 1\} \text{ и}$$

$$S(z, f_G) = S(u_j, f_{K_k^q}) \cup \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}.$$

Возможны следующие подслучаи:

Случай 3.1 $w = u_i, z = u_j \in K_k^p$ ($1 \leq p < n, (p - 1) \cdot k \leq i < j \leq p \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски $f_{K_k^p}$, $S(u_j, f_{K_k^p}) \subset \{l + p \cdot k - 1, l + p \cdot k, \dots, l + (p + 1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $i < l + p \cdot k - 1$, то $i \notin S(u_j, f_{K_k^p})$. С другой стороны, так как $i < j$, то $i \notin \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}$. Очевидно, что цвет i содержится в множестве $S(w, f_G)$, но не содержится в $S(z, f_G)$, следовательно, эти множества не совпадают.

Случай 3.2 $w = u_i, z = u_j \in K_k^q$ ($1 \leq p < q < n, (p-1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1, (q-1) \cdot k \leq j \leq q \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски $f_{K_k^q}$, $S(z, f_{K_k^q}) \subset \{l + q \cdot k - 1, l + q \cdot k, \dots, l + (q+1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $|S(z, f_{K_k^q})| = k - 1$, то по крайней мере одно из двух чисел $(q+1) \cdot k + l - 3$ и $(q+1) \cdot k + l - 2$ принадлежит множеству $S(z, f_{K_k^q})$. Так как $S(z, f_{K_k^q}) \subset S(z, f_G)$, то по крайней мере одно из этих чисел также принадлежит $S(z, f_G)$. Согласно определению f_G , $S(w, f_G) \subseteq \{i, i+1, \dots, i+l-1, l+p \cdot k - 1, l+p \cdot k, \dots, l+(p+1) \cdot k - 2\}$. Поскольку $q > p$ и $k \geq 2$, то $l + (q+1) \cdot k - 3 > l + (p+1) \cdot k - 2$, а значит ни одно из чисел $(q+1) \cdot k + l - 3$ и $(q+1) \cdot k + l - 2$ не принадлежит множеству $S(w, f_G)$. Таким образом $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Случай 3.3 $w = u_i \in K_k^p, z = u_j \in K_k^n$ ($1 \leq p < n, (p-1) \cdot k \leq i \leq p \cdot k - 1, (n-1) \cdot k \leq j \leq n \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски f_G , $S(w, f_G) \subset \{i, i+1, \dots, i+l-1\} \cup S(w, f_{K_k^p})$ и $S(z, f_G) \subset \{j, j+1, \dots, j+l-1\} \cup S(z, f_{K_k^n})$. Поскольку $S(z, f_{K_k^n}) \subset \{l+n \cdot k - 1, 0, 1, \dots, k-2\}$ и $|S(z, f_{K_k^n})| = k - 1$, то, по крайней мере, одно из двух чисел 0 и $n \cdot k + l - 1$ принадлежит множеству $S(z, f_{K_k^n})$. Очевидно, что $S(z, f_{K_k^n}) \subset S(z, f_G)$, следовательно, хотя бы одно из этих чисел также принадлежит $S(z, f_G)$. Если $n \cdot k + l - 1 \in S(z, f_G)$, то $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$, поскольку $n \cdot k + l - 1 \notin S(w, f_G)$.

Предположим теперь, что $n \cdot k + l - 1 \notin S(z, f_G)$. Тогда $S(z, f_G) = \{0, 1, \dots, k-2, j, j+1, \dots, j+l-1\}$. Поскольку $S(w, f_{K_k^p}) \subset \{l+p \cdot k - 1, l+q \cdot k, \dots, l+(q+1) \cdot k - 2\}$, то равенство $S(w, f_G) = S(z, f_G)$ возможно только в том случае, если $i = 0$ и $\{j, j+1, \dots, j+l-1\} = S(w, f_{K_k^p}) \subseteq \{k+l-1, k+l, \dots, 2k+l-2\}$. Так как $|S(w, f_{K_k^p})| = k - 1$, то получаем, что $l = k - 1$ и $j \in \{2k - 2, 2k - 1\}$, что возможно только в случае, когда $n = 2$. Тогда, согласно определению

раскраски $f_{K_k^2}$, имеем $f(u_{2k-1}u_{2k-2}) = 2k + l - 1$. Так как $2k + l - 1 \notin S(z, f_G)$, то $j \notin \{2k - 2, 2k - 1\}$.

Случай 3.4 $w = u_i, z = u_j \in K_k^n$ ($k \cdot (n - 1) \leq i < j \leq n \cdot k - 1$).

Согласно определению раскраски f_G , $S(w, f_G) = \{i, i + 1, \dots, i + l - 1\} \cup S(w, f_{K_k^n})$ и $S(z, f_G) = \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\} \cup S(z, f_{K_k^n})$, где $S(z, f_{K_k^n}) \subset \{n \cdot k + l - 1, 0, 1, \dots, k - 2\}$. Поскольку $k - 2 < i < n \cdot k + l - 1$, то $i \notin S(z, f_{K_k^n})$. Более того, так как $i < j$, то $i \notin \{j, j + 1, \dots, j + l - 1\}$. Легко заметить, что цвет i принадлежит множеству $S(w, f_G)$, но не принадлежит множеству $S(z, f_G)$, следовательно, $S(w, f_G) \neq S(z, f_G)$.

Заключение

В данной работе были получены точные значения вершинно-различающего хроматического индекса для одного класса графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. West D. Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
2. Burris A. Vertex-distinguishing edge-colorings. Ph.D. Dissertation, Memphis State University, 1993.
3. Burris A., Schelp R. Vertex-distinguishing proper edge-colorings, Journal of Graph Theory 26(2), 1997. PP. 73–82.
4. Cerný J., Horňák M., Soták R. Observability of a graph. Math. Slovaca 46, 1996. PP. 21–31.
5. Horňák M., Soták R. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. Ars Comb. 41, 1995. PP. 289–301.
6. Horňák M., Soták R. Asymptotic behavior of the observability of Q_n , Discrete Math. 176, 1997. PP. 139–148.
7. Kooij R. On generalized windmill graphs, Linear Algebra and its Applications 565, 2019. PP. 25–46.

**ON VERTEX DISTINGUISHING PROPER EDGE COLORINGS
OF A CLASS OF GRAPHS*****P. Petrosyan*^{1,2}, *T. Petrosyan*²***Yerevan State University*¹
*Russian-Armenian (Slavonic)University*²**ABSTRACT**

A proper edge coloring of a graph G is a mapping $f: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges $e, e' \in E(G)$. A proper edge coloring f of a graph G is called vertex distinguishing if for any two distinct vertices $u, v \in V(G)$, $S(u, f) \neq S(v, f)$, where $S(v, f) = \{f(e) \mid e = vw \in E(G)\}$. The minimum number of colors required for a vertex distinguishing proper coloring of a graph G is denoted by $\chi'_{va}(G)$ and called vertex distinguishing chromatic index of G . In this work we provide an upper bound on the vertex distinguishing chromatic index of windmill graphs and some generalized windmill graphs.

Keywords: edge-coloring, vertex distinguishing edge-coloring, vertex distinguishing chromatic index, windmill graphs, generalized windmill graphs.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-53-63
УДК 621.548

Поступила: 03.02.2025г.
Сдана на рецензию: 13.02.2025г.
Подписана к печати: 10.03.2025г.

ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНВЕРТОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ В СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯХ ПО КРИТЕРИЮ ИСКАЖЕНИЯ ФОРМЫ НАПРЯЖЕНИЯ

Л.А. Арутюнян

*Национальный политехнический университет Армении
lianain@outlook.com*

АННОТАЦИЯ

Параметры электрической энергии, генерированной солнечными панелями, и параметры электроэнергии, потребляемой сетью, принципиально не совместимы по роду тока, отклонению формы напряжения от синусоидальной, величине и отклонению напряжения. Согласование параметров генерации электрической энергии солнечными панелями и параметров потребления электроэнергии сетью должно выполняться инвертором. Это является важной функцией инвертора и определяет выбор его типа. В настоящее время на солнечных электростанциях предпочтение отдается инверторам напряжения, а не инверторам тока, что недостаточно обосновано. С целью обоснования выбора типа инвертора на основании разработанной программы посредством спектрального анализа исследуются формы генерированного напряжения, их искажения относительно синусоидальной, и частотные спектры сравнительно для инвертора напряжения и инвертора тока.

Ключевые слова: инверторы напряжения, тока, частотный спектр.

В настоящее время солнечные электростанции получили широкое распространение во всем мире, в том числе и в Армении. Наиболее

распространены фотоэлектрические (или вольтаические) солнечные электростанции непосредственного преобразования солнечной энергии в электрическую. Установленная мощность сооружаемых солнечных электростанций и вырабатываемая ими электроэнергия экспоненциально увеличиваются [1]. Подавляющее большинство солнечных электростанций работает в режиме параллельной работы с сетью, отдавая всю выработанную электроэнергию в промышленную электрическую сеть.

Солнечные панели преобразуют энергию солнечного излучения в электрическую энергию постоянного тока. Величина напряжения на выходе панелей зависит от интенсивности солнечного облучения панелей и, в зависимости от природных условий, изменяется от нуля до номинальной. Это нерегулярное напряжение постоянного тока с выхода панелей посредством инвертора преобразуется в переменное напряжение синусоидальной формы с напряжением и частотой сети. Выход инвертора соединен с электрической сетью. Генерированная солнечными панелями электрическая мощность передается в электрическую сеть.

Параметры генерированной электрической энергии солнечными панелями и параметры электроэнергии в сети – такие, как род тока, напряжение (величина и отклонение напряжения), форма кривой напряжения, частота, характеристики регулирования, принципиально не совместимы [2].

Согласование параметров электроэнергии, генерированной солнечными панелями, и параметров электроэнергии в сети должно выполняться инвертором. Это является важной функцией инвертора.

Постановка задачи и обоснование методики

В настоящее время в солнечных электростанциях предпочтение отдается инверторам напряжения. Затем исследуется схема инвертора напряжения по условию совместимости указанных параметров с целью обоснования и выбора типа инверторов для фотоэлектрических солнечных электростанций.

Инвертор напряжения

Инвертор напряжения представляет собой коммутатор (переключатель полярности) в цепи постоянного тока, который преобразует однополярное напряжение постоянного тока в переменное напряжение переменного тока [3, 4], (Рис. 1, 2, 3). Коммутатор выполняется на полупроводниковых ключах – тиристорах или на биполярных транзисторах с изолированным затвором *Insulated gate bipolar transistor* (так называемых транзисторах *IGBT*). Инвертор напряжения является источником напряжения с малым внутренним сопротивлением. Схема однофазного инвертора напряжения, выполненного на тиристорах, приведена на Рис.1, диаграмма напряжения и тока – на Рис. 2.

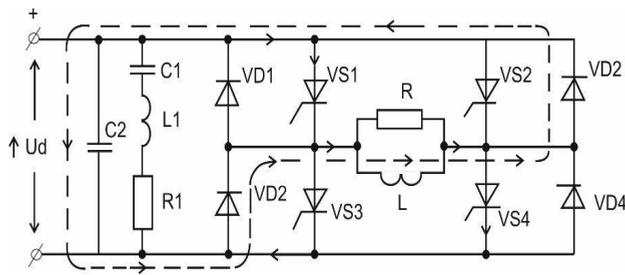


Рис.1. Схема однофазного инвертора напряжения на тиристорах.

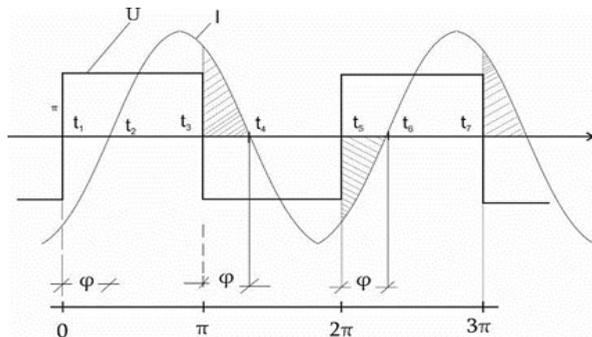


Рис.2. Диаграмма тока и напряжения и тока.

Инвертор состоит из двух пар коммутационных тиристоров VS1, VS4 и VS2, VS3, двух пар обратных диодов VD1, VD4 и VD2, VD3,

резонансного контура искусственной коммутации, состоящего из конденсатора C_1 , индуктивности L_1 и регулировочного резистора R_1 ; инвертор соединен с нагрузкой $R-L$ переменного тока (в общем случае активно-индуктивной нагрузкой сети). Обратные диоды VD_1, VD_2, VD_3, VD_4 создают цепь для протекания отстающей от напряжения части активно-индуктивного тока нагрузки (на Рис. 2 эта часть тока заштрихована, путь протекания тока указан пунктирной линией).

Принцип работы инвертора напряжения изложен в [3, 4]. Напряжение на выходе инвертора имеет прямоугольную форму (Рис. 2), амплитуда выходного напряжения не зависит от величины и фазы нагрузки. Величина переменного тока и его форма определяются величиной и характером нагрузки (активная, индуктивная, емкостная) в цепи переменного тока.

Особенностью инвертора напряжения, выполненного на тиристорах, является необходимость принудительного запираания коммутационных тиристоров предыдущей полярности при переходе выходного напряжения с одной полярности на противоположную. Это выполняется посредством контура искусственной коммутации тиристоров.

Инвертор напряжения может быть выполнен на биполярных транзисторах с изолированным затвором – так называемых транзисторах *IGBT* (*Insulate gate bipolar transistor*). Достоинствами транзисторов *IGBT* относительно тиристоров являются: управление напряжением, а не током, возможность запираания цепи под током посредством снятия сигнала управления, малые потери, высокая термоустойчивость. В настоящее время созданы транзисторы *IGBT* напряжением несколько киловольт и током несколько килоампер.

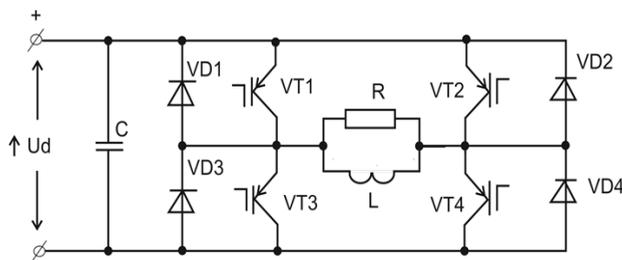


Рис.3. Схема инвертора напряжения на транзисторах.

Результаты исследования

Форма напряжения на выходе инвертора

Одним из основных параметров электроэнергии в энергосистеме является форма напряжения. Форма напряжения оценивается коэффициентом искажения относительно синусоидальной формы. Коэффициент искажения напряжения на шинах потребителя нормируется ГОСТом [2] на уровне 8%. Выходное напряжение инверторов напряжения, как было показано выше, заметно отклоняется от синусоиды согласно принципу работы инвертора: напряжение инвертора напряжения имеет прямоугольную форму (Рис. 2). Причем указанные формы напряжений не зависят от величин напряжений и нагрузки.

Отклонение формы напряжения от синусоидальной наносит значительный качественный и экономический ущерб.

Коэффициент искажения формы кривой напряжения аналитически определяется посредством разложения функции выходного напряжения инвертора в ряд Фурье и последующих вычислений следующим образом.

Функция выходного напряжения инвертора представляется в виде разложения в ряд Фурье:

$$U_t = f(x) = a_0 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

где n – коэффициенты разложения постоянной составляющей:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

в рассматриваемом случае $a_0 = 0$,
cos-ных составляющих:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (3)$$

$$(n=1,3,5,\dots);$$

sin-ных составляющих:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (4)$$

$$(n=1,3,5,\dots);$$

коэффициенты (амплитуды) частотных составляющих:

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx; \quad (5)$$

коэффициент искажения формы кривой напряжения:

$$K_f = \sqrt{A_3^2 + A_5^2 + A_7^2 + \dots + A_{11}^2} \cdot 100\%. \quad (6)$$

Коэффициент искажения формы кривой напряжения представляет собой отношение среднеквадратической суммы всех высших гармонических составляющих напряжения к основной составляющей напряжения, имеющей синусоидальную форму и основную частоту *50 Гц*.

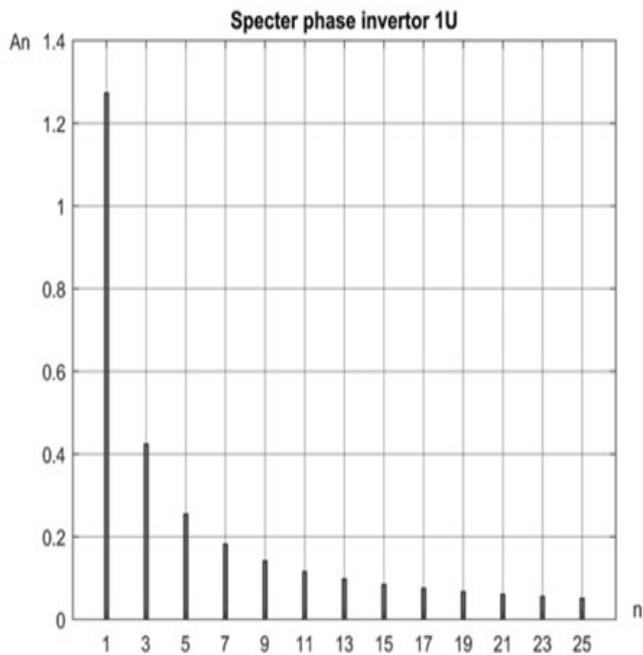
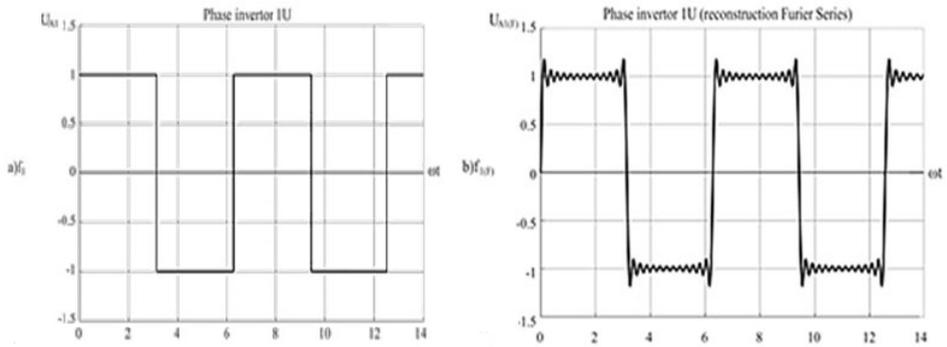
Высшие гармонические напряжения представляют собой помехи в отношении генерации основного напряжения синусоидальной формы частоты *50*, т.е. являются паразитными.

Указанные функции выходного напряжения инвертора разлагаются в ряд Фурье по (1...6) до 25-й гармонической составляющей согласно разработанной программе. Результаты представлены ниже.

На рис. 4 приведены результаты разложения функции фазового напряжения f_1 трехфазного инвертора напряжения (либо однофазного инвертора напряжения), f_1 (рис.4 а) реконструкции напряжения с использованием гармоник до 25-й включительно (рис.4 б) и частотный спектр (рис. 4 в). В численной Табл. (Рис. 4 б, в) частотного спектра указаны амплитуды гармоник по (4); в нижней строке указана величина коэффициента искажения по (5).

На рис. 5 приведены результаты разложения функции линейного напряжения f_4 с укороченной длительностью импульса f_4 (Рис. 5 б, а) трехфазного инвертора напряжения, реконструкции напряжения с использованием гармоник до 25-й (Рис. 5 б, в) и частотный спектр (Рис. 5 б, в). При данной форме напряжения в частотном спектре отсутствуют гармоники, кратные трем.

На основании вышеизложенного выполняется анализ формы напряжения, рассчитываются частотные спектры, уровень искажения напряжений инверторов напряжения и инверторов тока солнечных электростанций.

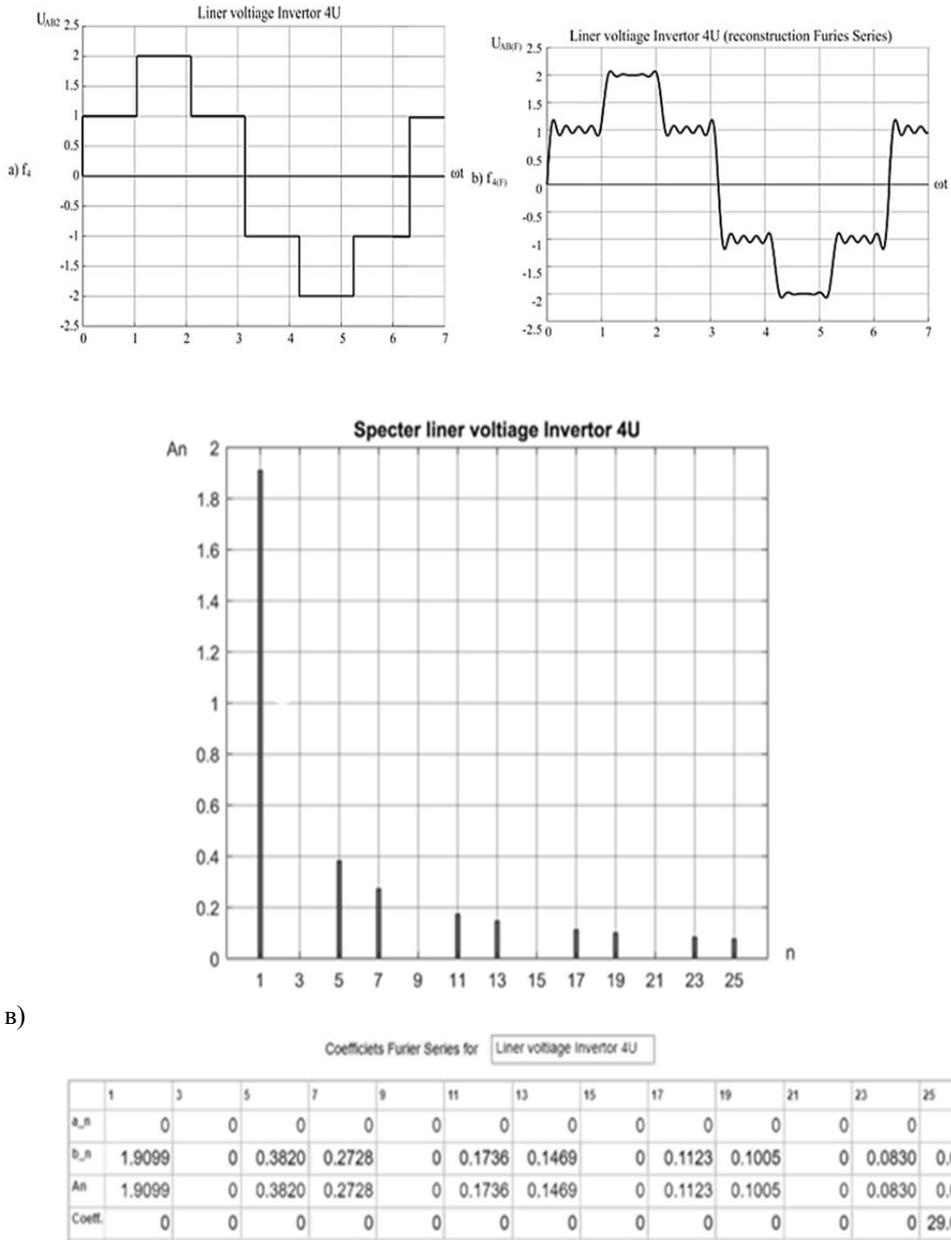


в)

Coefficients Fourier Series for Phase inverter IU

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
b_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_n	1.2732	0.4244	0.2546	0.1819	0.1415	0.1157	0.0979	0.0849	0.0749	0.0670	0.0606	0.0554	0.0509
Coeff.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46.3119

Рис. 4. Фазовое напряжение инвертора напряжения:
а) функция, б) реконструкция, в) частотный спектр.



*Рис.5. Линейное напряжение инвертора:
 а – функция, б – реконструкция, в – частотный спектр.*

На основании изложенных выше результатов исследований в таблице приведены параметры инвертора напряжения по коэффициентам искажения выходного напряжения Рис. 4–5, формула (7).

Таблица 1.

Вид инвертора	Выходное напряжение	Коэффициент искажения формы напряжения K_f , %	Снижение КПД $\Delta\eta$, %
Инвертор напряжения	фазовое напряжение	46,31	46,31
	линейное напряжение	29,03	29,03

Высшие гармонические составляющие напряжения также генерируются солнечными панелями, на их генерацию затрачивается солнечная энергия, выделяются тепловые потери, рассчитывается установленная мощность оборудования. Электрическая энергия высших гармоник напряжения является паразитной, по этой причине она подавляется фильтрами. Электрическая энергия высших гармоник в сеть не поступает и не используется. Исходную искаженность формы генерированного напряжения относительно синусоидальной следует рассматривать как фактор снижения КПД инвертора и солнечной электростанции. Количественно указанное снижение КПД равно

$$\Delta\eta = K_{f\text{исх}} / K_{f\text{доп}}, \quad (7)$$

где $K_{f\text{исх}}$ – исходный коэффициент искажения напряжения относительно синусоидальной на выходе инвертора (6) (Табл.1); $K_{f\text{доп}}$ – допустимый коэффициент искажения напряжения на выходе фильтра (8%).

Снижение КПД преобразования пропорционально искажения напряжения относительно синусоидальной на выходе инвертора (7).

Выводы

1. Форма выходного напряжения инверторов напряжения имеет значительные искажения и высокий уровень низкочастотных гармонических составляющих потерь. Это обстоятельство требует установки специальных высокочастотных фильтров.

2. Инверторы напряжения обладают простой схемой, жесткой однозначной связью действующих напряжений на входе и выходе, что обеспечивает б`ольшую устойчивость и возможность модуляции относительно иных типов инверторов.

3. Переменное напряжение, создаваемое на выходе инверторов напряжения, имеет значительные искажения формы относительно синусоидальной. Показано, что в трехфазной схеме коэффициент искажения переменного однофазного напряжения составляет 46,31%, а линейного напряжения 29,03%.

4. Указанные искажения напряжения приводят также к уменьшению КПД преобразования напряжения и КПД электростанции – на ту же величину.

5. Указанные величины искажений достаточно велики, превышают допустимые Стандартом требования, и вызывают необходимость принятия мер по улучшению формы выходного напряжения инвертора до требований Стандарта. При этом в той же степени может быть повышен КПД инвертора и электростанции.

6. Использование в схеме инверторов запираемых транзисторов *IGBT* (вместо тиристоров) уменьшает материалозатратность инверторов напряжения и рекомендуется для использования.

7. Изложенная комбинация параметров инверторов напряжения является предпочтительной для использования в солнечных электростанциях относительно инверторов других типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. <https://renew.ru/the-installed-capacity-of-world-solar-energy-exceeded-400-gw>
Установленная мощность мировой солнечной энергетики.

2. ГОСТ 32144-2013. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения.
3. Руденко В.С., Сенько В.И., Чиженко И.М. Основы преобразовательной техники: Учебник для вузов. М. : Высшая школа, 1980. 424с.
4. Бернштейн А.Я., Гусяцкий Ю.М., Кудрявцев А.В., Сарбатов Р.С. Тиристорные преобразователи частоты в электроприводе. М.: «Энергия», 1980. 328с.

STUDY OF VOLTAGE INVERTERS BY MEASURING THE VOLTAGE CURVE OF SOLAR POWER PLANTS

L. Harutyunyan

National Polytechnic University of Armenia

ABSTRACT

The parameters of electrical energy generated by solar panels and the parameters of electricity consumed by the network are fundamentally incompatible in terms of the type of current, the deviation of the voltage form from a sinusoidal, the magnitude and deviation of the voltage. Coordination of the parameters of electricity generation by solar panels and the parameters of electricity consumption by the network must be carried out by the inverter. This is an important function of the inverter and determines the choice of its type. Currently, in solar power plants, preference is given to voltage inverters, rather than current inverters, which is not sufficiently justified. In order to justify the choice of the type of inverter based on the developed program, by means of spectral analysis, the forms of the generated voltage, their distortion relative to the sinusoidal and the frequency spectra are studied comparatively for the voltage inverter and the current inverter.

Keywords: voltage and current inverters, frequency spectrum.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-64-73
УДК 621.3.049.77

Поступила: 08.01.2025г.
Сдана на рецензию: 20.01.2025г.
Подписана к печати: 22.01.2025г.

ACCURACY IMPROVEMENT TECHNIQUE FOR ON-CHIP CURRENT SOURCES WITH NO EXTERNAL COMPONENTS

V. Sahakyan

*National Academy of Sciences of Armenia
Institute of Radiophysics and Electronics
vahans@synopsys.com*

ABSTRACT

A new design technique for accuracy improvement of on-chip reference current sources is proposed in this paper. A mathematical model has been developed describing the operation of the proposed technique. Based on the obtained equations the variation of the reference current resulted by the operating conditions' changes and process deviations should reach to 5%. The proposed technique has been implemented in the design of on-chip reference current source circuit in 14nm FinFet technology. Spice simulations performed for the developed circuit shown less than $\pm 7\%$ variation of the reference current in the $-40..125^{\circ}\text{C}$ temperature range considering the process variations in ± 3 sigma range. Circuit keeps that accuracy for the supply voltage drop up to 0.66V.

Keywords: on-chip current source, current generators, reference current sources, aging.

Introduction

In modern electronic systems, the demand for accurate and stable current sources has become increasingly critical, particularly in applications

such as sensor interfacing, analog signal processing, and precision measurement systems [1],[2]. High precision current sources are essential components that provide a constant current output with minimal variation, ensuring reliable performance in sensitive electronic circuits. One of the technical specifications to modern complementary metal-oxide-semiconductor (CMOS) ICs is to ensure high stability of the main parameters, regardless of ambient temperature, supply voltage, and technology deviations [3],[4]. Main parameters of the elements in relation to the typical characteristics may deviate from values reaching tens of percent to multiple [5]. These current sources are designed to maintain a consistent output despite fluctuations in load resistance or supply voltage, thereby enhancing the overall accuracy of the system. High precision current sources are characterized by their low noise, high stability, and excellent temperature coefficients, making them suitable for applications in instrumentation, telecommunications, and industrial automation. With the advent of portable devices, the energy consumption and requirements for the IC surface have also tightened, limiting the use of circuits with a large surface area and high energy consumption [2],[3]. The design of high precision current sources can be achieved through various methods, including the use of operational amplifiers, transistor-based configurations, and integrated circuit solutions. Each approach offers unique advantages and challenges, depending on the specific requirements of the application [5],[6]. The availability of precision voltage source doesn't ensure the design of stable current sources. Since the combination of resistance and a reference voltage source in the MOS structure depends on resistance variation [6],[7]. As technology advances, the integration of high precision current sources into compact and efficient designs continues to evolve, enabling new possibilities in the fields of electronics and instrumentation. This introduction sets the stage for a deeper exploration of the principles, designs, and applications of high precision current sources, highlighting their significance in achieving high-performance electronic systems. In the realm of electronic circuit design, achieving high precision in current sourcing remains a significant challenge. Many applications, such as precision measurement systems, sensor interfaces, and analog signal

processing, require current sources that can deliver stable and accurate output currents under varying conditions. However, several factors contribute to the difficulties in designing high precision current sources:

1. **Load Variability:** Fluctuations in load resistance can lead to significant deviations in output current, affecting the accuracy of measurements and the performance of connected devices.
2. **Supply Voltage Fluctuations:** Variations in supply voltage can introduce errors in current output, necessitating robust designs that can maintain stability across a range of operating conditions.
3. **Temperature Sensitivity:** Many electronic components exhibit temperature-dependent characteristics, which can lead to drift in output current as environmental conditions change.
4. **Noise and Interference:** External electromagnetic interference and inherent noise in electronic components can compromise the precision of current sources, particularly in sensitive applications.
5. **Integration Challenges:** As the trend toward miniaturization continues, integrating high precision current sources into compact designs without sacrificing performance poses additional engineering challenges.

Addressing these issues is critical for the development of reliable high precision current sources that meet the stringent requirements of modern electronic systems. This problem statement underscores the need for innovative design approaches and technologies that can enhance the accuracy, stability, and overall performance of current sources in various applications.

Architecture and Operation Principle

The block diagram of the current source consists of the following blocks: Start-up circuit, voltage generator which generates voltage with positive temperature coefficient and reference current generator (Fig. 1). The start-up circuit is responsible for initializing the current source upon power-up. It ensures that the system transitions from a non-operational state

to a fully functional state in a controlled manner. The voltage generator is designed to produce a voltage output with a positive temperature coefficient (PTC). This characteristic is crucial for compensating for temperature variations that can affect the performance of the current source. As the temperature increases, the output voltage from this generator will also increase, which helps to counteract the effects of temperature-induced drift in the reference current.

It is known that the current flowing through a N-MOS transistor in a linear mode is determined by the:

$$I_d = \beta[(V_{gs} - V_{th})V_{ds} - 0.5V_{ds}^2]$$

where

$$\beta = \frac{(W/L)\mu_n\epsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

current flowing through a N-MOS transistor in a saturation mode is determined by the:

$$I_d = \frac{1}{2}\beta[(V_{gs} - V_{th})^2]$$

Hence, it is obvious that if the transistor dimensions are large, then changes in the remaining parameters under the above influences can be ignored. If the temperature is constant, mobility is a fixed parameter.

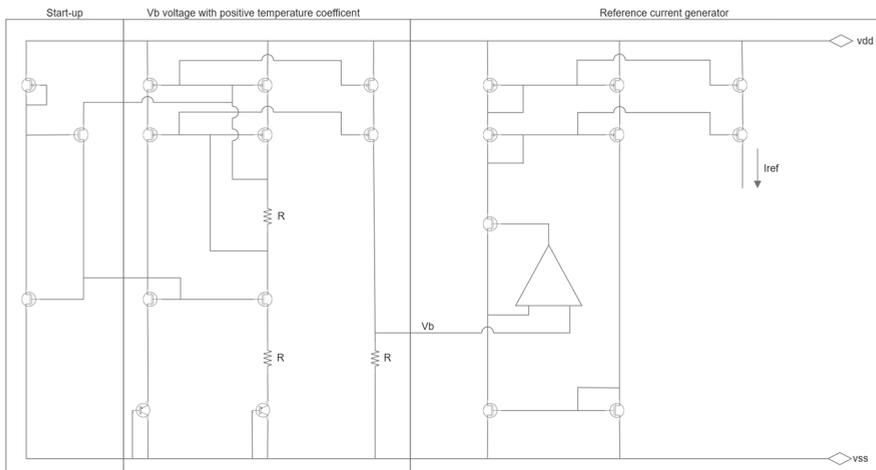


Fig. 1. The block diagram of a high-precision DC current source.

In cases of all possible processes, the thickness of the oxide layer t_{ox} varies approximately within $\pm 4.5..5\%$. If assume the temperature is stable, then the change in β will be approximately within 5% . Imagine that the currents flowing through that two N-MOS transistors are the same.

$$I_{d1} = I_{d2}$$

$$\beta[(V_{gs1} - V_{th})V_{ds1} - 0.5V_{ds1}^2] = \frac{1}{2}\beta[(V_{gs2} - V_{th})^2]$$

Imagine that $V_{gs1} = V_{gs2}$.

$$(V_{gs} - V_{th}) = \frac{I_d + 0.5\beta V_{ds}^2}{\beta V_{ds}}$$

$$I_d = \frac{1}{2}\beta\left[\left(\frac{I_d + 0.5\beta V_{ds}^2}{\beta V_{ds}}\right)^2\right]$$

$$I_d^2 + \beta V_{ds}^2 I_d(1 - 2\eta) + \frac{\beta^2 V_{ds}^4}{4} = 0$$

where

$$\eta = \frac{W_1}{W_2}$$

If $\eta = \frac{W_1}{W_2} = 1$, then

$$I_d = \frac{\beta V_{ds}^2}{2}$$

$$\beta = \frac{(W/L)\mu_n \epsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

$$\beta(T) = \frac{W}{L}\mu(T_0)\left(\frac{T_0}{T}\right)^{-1.5} = bT^{-1.5}$$

The drain source voltage was designated as $V_{ds} = V_b$: V_b is directly proportional to temperature

$$V_b(T) = cT$$

To understand how the resulting expression depends on the temperature change, it is necessary to derive it in time and get the following expression:

$$\frac{\partial I_d(T)}{\partial T} = -1.5aT^{-2.5}bT^2 + 2bTaT^{-1.5}$$

From the graphical representation of the resulting expression, it can be seen that the current is independent on the temperature variation (Fig. 2).

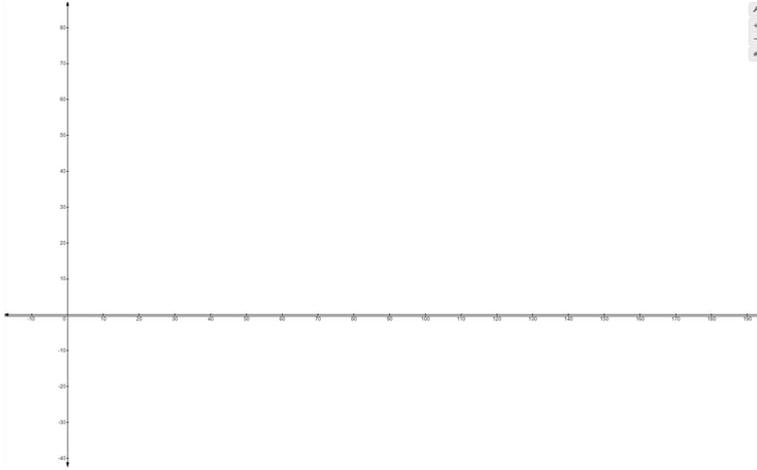


Fig.2. Graphical display of the obtained equality.

The graphical display likely includes a temperature axis alongside the reference current output, allowing for a direct visual correlation between temperature changes and the corresponding reference current values. The minimal deviation observed in the reference current across a wide temperature range underscores the effectiveness of the design in maintaining performance consistency.

Simulation Results

The dependency of the reference current on various stabilization factors has been thoroughly analyzed and evaluated. This investigation encompasses a detailed examination of the key parameters that influence the stability and accuracy of the reference current within the circuit design. Based on the simulation results it is possible to reach less than $\pm 4\%$ current change from the temperature variation in range $-40..125^{\circ}\text{C}$ (Fig. 3).

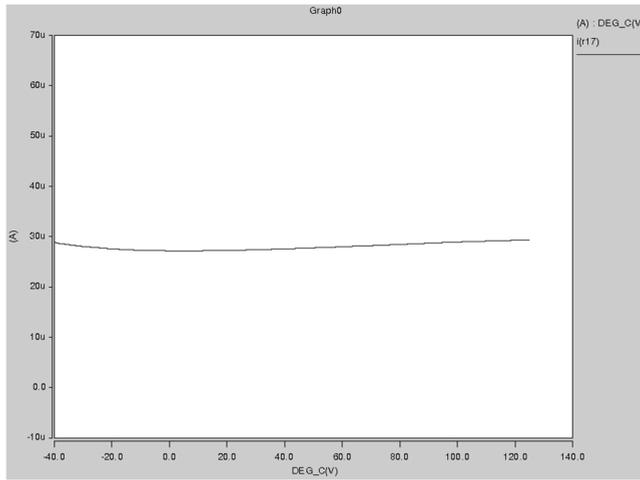


Fig. 3. The dependency of the reference current on the ambient temperature variation.

The results show that the reference current variation for the $-40..125^{\circ}\text{C}$ temperature range considering the process variations in ± 3 sigma range and supply voltage variation in $\pm 10\%$ range is less than $\pm 7\%$ (Fig. 4).

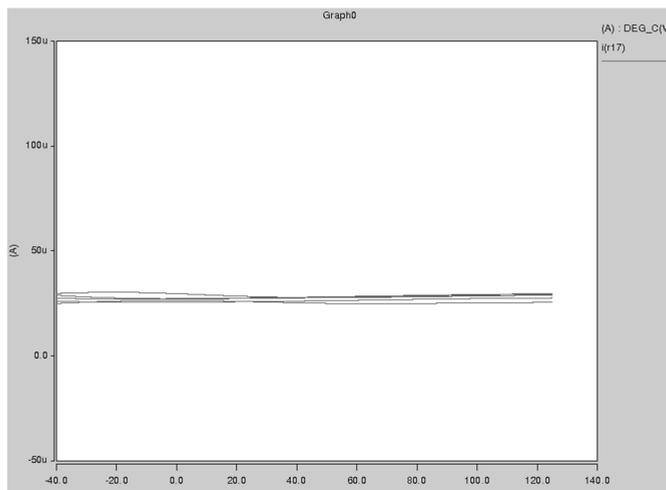


Fig. 4. The dependence of the output current on temperature, as well as supply voltage and technological changes.

This finding underscores the effectiveness of the proposed current source design in achieving a high level of stability and accuracy under challenging operating conditions. The ability to limit the reference current variation to within $\pm 7\%$ is particularly significant, as it demonstrates the circuit's robustness against both environmental factors and manufacturing inconsistencies.

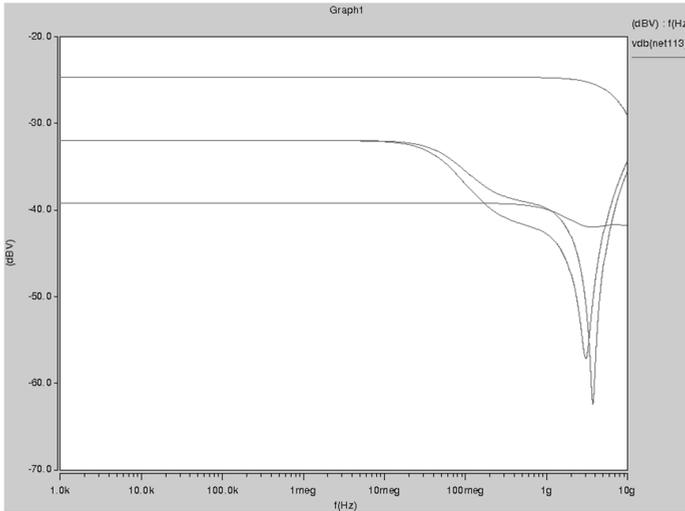


Fig. 5. The results of the frequency analysis.

The subsequent analysis focuses on evaluating the impact of power supply noise on the performance of the designed circuit. Power supply noise can significantly affect the stability and accuracy of electronic circuits, particularly in sensitive applications such as analog signal processing, precision measurement systems, and current sources. The PSRR analysis performed in $100..10^{10}$ Hz ensure more than -10dB noise rejection and more than -35dB rejection in low frequencies range (Fig. 5).

Conclusion

In this paper, we present a novel design technique for on-chip current sources that has been proposed, meticulously designed, and rigorously

simulated. This innovative approach aims to enhance the performance, accuracy, and stability of current sources used in integrated circuits, addressing common challenges associated with traditional designs. According to the simulation results, the newly developed circuit demonstrates the capability to deliver accurate reference currents while operating effectively within a temperature range of -40°C to 125°C and accommodating supply voltage variations of $\pm 10\%$. Notably, the circuit maintains a variation in the reference current of approximately $\pm 7\%$ under these conditions. The main limitation of said techniques is the usage of biasing circuits as well as the estimated area increase by 25%. Both requirements are deemed acceptable, particularly in light of the critical need for high-precision current sources and the importance of mitigating performance degradation in various applications.

REFERENCES

1. *Razavi B.* Design of Analog CMOS Integrated Circuits // International Edition, 2001.
2. *Chen Zhao, Randall Geiger, Degang Chen.* A Compact Low-Power Supply-Insensitive CMOS Current Reference // IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Seoul, Korea. 2012. PP. 2825–2828.
3. *Yoo C. and Park J.* CMOS current reference with supply and temperature compensation // Electronics Letters 6th December. 2007. Vol. 43 No. 25. PP. 1422–1424.
4. *Ilkka Nissinen, Juha Kostamovaara.* A Low Voltage CMOS Constant Current. Voltage Reference Circuit // International Symposium on Volume: 1 Circuits and Systems. 2004. PP. 381–384.
5. *Azcona B., Calvo S., Celma N., Medrano M.* Sanz Precision CMOS Current Reference with Process and Temperature Compensation // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2014. PP. 910–913.
6. *Dehghani R. and Atarodi S.* A New Low Voltage Precision CMOS Current Reference With No External Components // Engineering 10th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems. 2003. Vol.1. PP. 156–159.
7. *Yu Peng Yanchao, Xia Shaojun Wang.* Design of a High Precision Current Source // 9th International Conference on Electronic Measurement & Instruments. 2009. Vol.1. PP. 1065–1069.

**СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ
ВНУТРИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ ТОКА
БЕЗ ВНЕШНИХ КОМПОНЕНТОВ**

В.А. Саакян

*Национальная академия наук Республики Армения
Институт радиофизики и электроники*

АННОТАЦИЯ

В статье предложен новый способ повышения точности внутрикристаллических источников тока. Предлагаемый метод основан на разработанной математической модели. В результате полученных уравнений доказано, что отклонение тока, вызванное изменением условий работы и неточностями технологического процесса, не должно превышать 4%. Предлагаемый метод был реализован с использованием 14-нм технологического процесса FinFet для разработки внутрикристаллического эталонного источника тока. В результате экспериментального моделирования в диапазоне температур $-40...125^{\circ}\text{C}$ при отклонениях технологического процесса ± 3 сигма разработанная схема обеспечивала $\pm 7\%$ отклонений от эталонного тока. Схема способна поддерживать указанную точность при падении напряжения питания до 0.66 В.

Ключевые слова: внутрикристаллический источник тока, генераторы тока, опорные источники тока.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-74-79
УДК 621.677

Поступила: 01.04.2025г.
Сдана на рецензию: 04.04.2025г.
Подписана к печати: 07.04.2025г.

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ПЕЛЕНГАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ В РЧ-СИСТЕМАХ

А.В. Амбарцумян, Т.Ш. Манукян, Г.З. Сугян, Г.Г. Степанян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
harut.hambarcumyan.98@gmail.com, tigran.manukyan01@gmail.com,
sughyan01@gmail.com, hrach8086@gmail.com*

АННОТАЦИЯ

Системы пеленгации играют важную роль в различных областях, включая телекоммуникации, навигацию и оборону. Однако точность этих систем может снижаться в сложных условиях с высоким уровнем помех или при наличии многолучевых эффектов. В данной статье представлен усовершенствованный алгоритм пеленгации, использующий адаптивные методы для повышения точности и устойчивости. Предлагаемый алгоритм устраняет ключевые ограничения существующих методов, динамически адаптируясь к условиям окружающей среды и характеристикам сигнала. Результаты моделирования демонстрируют значительное улучшение точности пеленгации, особенно в сложных сценариях, что делает данный подход жизнеспособным решением для современных радиочастотных систем. Результаты этого исследования способствуют развитию технологий пеленгации, имея значение как для теоретических исследований, так и для практической реализации.

Ключевые слова: РЧ пеленгатор, IQ-сигнал, частота, амплитуда.

Введение

Пеленгация, являющаяся ключевой функцией в радиочастотных системах, включает определение направления входящих сигналов для

обеспечения точного отслеживания местоположения и перехвата сигналов. Широко используемые традиционные алгоритмы, такие как метод классификации нескольких сигналов (MUSIC) и метод оценки параметров сигналов с использованием ротационной инвариантности (ESPRIT), ценятся за их высокую точность в определении направлений сигналов [1]. Однако эти методы часто сталкиваются с трудностями в сложных условиях, где такие факторы, как многолучевое распространение, помехи и шум, могут отрицательно сказаться на их производительности [2].

В последние годы было проведено множество исследований, направленных на повышение эффективности систем пеленгации. Одним из перспективных направлений является внедрение адаптивных алгоритмов, способных подстраиваться под изменяющиеся условия окружающей среды и характеристики сигналов [3, 4]. Такие алгоритмы обеспечивают гибкость в оптимизации работы в реальном времени, что делает их особенно эффективными в динамичных и непредсказуемых условиях [1, 5].

В данной статье предлагается новый алгоритм пеленгации, основанный на существующих методах, с добавлением адаптивных элементов, направленных на повышение точности и надежности. Эффективность предлагаемого алгоритма оценивается с помощью моделирования в различных сценариях, что демонстрирует его превосходство над традиционными методами, особенно в условиях высокого уровня помех или многолучевых эффектов [2, 6]. Цель этого исследования – внести вклад в развитие технологий пеленгации, предложив более устойчивое решение, способное удовлетворить требования современных радиочастотных систем.

Методология и разработка алгоритма

Оптимизированный алгоритм системы пеленгации включает блок инициализации и блоки самого алгоритма пеленгации. Правильная инициализация системы имеет решающее значение для обеспечения ее эффективной работы во время измерений. Для системы подав-

ления помех с интеллектуальными настройками, на основе проведенных исследований и экспериментов, предлагается следующий процесс инициализации, который настраивает систему перед проведением измерений. Блок-схема процесса инициализации системы приведена на Рис. 1.

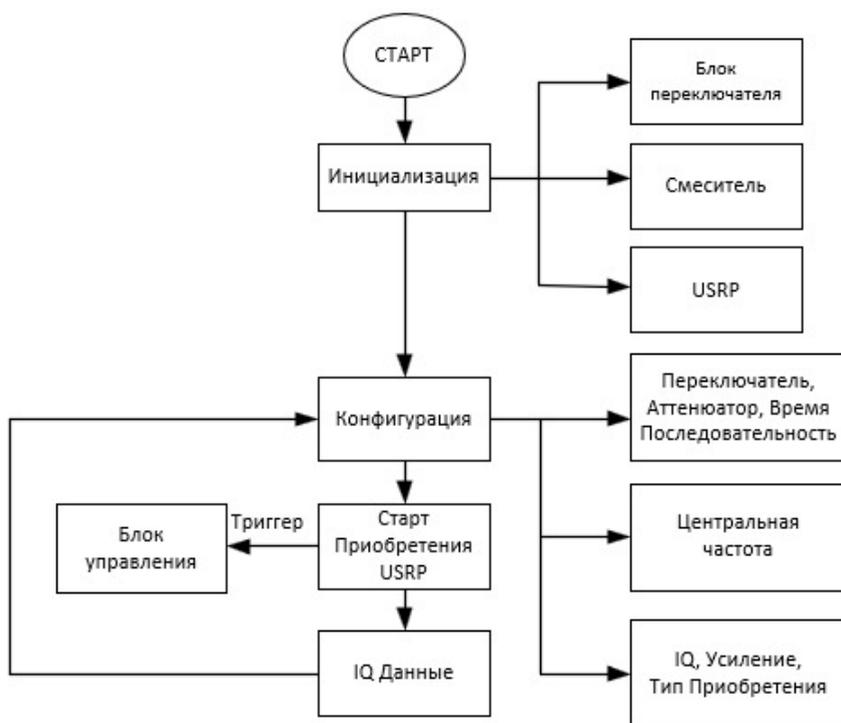


Рисунок 1. Блок-схема алгоритма инициализации системы.

После включения питания алгоритм переходит в блок инициализации, где настраиваются радиочастотные компоненты, такие как коммутатор, смесители и блок универсальной программируемой радиосистемы (USRP). После инициализации этих компонентов алгоритм продолжает работу и переходит к блоку конфигурации. На данном этапе алгоритм устанавливает параметры для уже инициализированных блоков.

Сначала в блоке конфигурации задаются параметры для коммутатора, включая последовательность переключений, время, значение ослабления и время ожидания. Затем настраиваются параметры для блока смесителей, такие как центральная частота и уровень ослабления. В заключение, для USRP устанавливаются параметры: скорость IQ-сигналов, коэффициент усиления, тип сбора данных и количество выборок. Эта последовательность соответствует логике аппаратной конфигурации, где сигнал сначала проходит через коммутатор, затем через смеситель и, наконец, поступает в USRP для оцифровки.

После завершения конфигурации система переходит в режим сбора данных, в котором от USRP к управляющей части системы отправляет триггерный сигнал, сигнализирующий о начале измерений. В процессе измерений собранные данные сохраняются в буфере, размер которого определяется алгоритмом на основе настроек, заданных на этапе конфигурации. Алгоритм рассчитывает размер буфера таким образом, чтобы данные считывались из него с той же скоростью, с которой блок измерений записывает их в буфер. Это предотвращает переполнение буфера или перезапись данных, что может привести к потере важной информации.

В блоке алгоритма пеленгации (Рис. 2) оптимизированный алгоритм оцифровывает измеренный сигнал и анализирует его для определения направления обнаруженного сигнала. Сначала алгоритм извлекает данные из буфера и передает их в блок IQ-сигнала. Далее IQ-сигнал направляется в делитель, где сигнал разделяется на количество антенн, что позволяет сузить область поиска.

Затем данные проходят через блок, который в зависимости от конфигурации либо возводит I-компоненту IQ-сигнала в квадрат, либо применяет медианный фильтр. После этого сигнал подвергается преобразованию с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) для каждого канала и передается в блок, который ищет пиковые значения на основе результатов БПФ. Все обнаруженные пиковые сигналы сравниваются в блоке сравнения, и максимальные пиковые значения передаются на финальный этап, где система определяет направление обнаруженного сигнала.

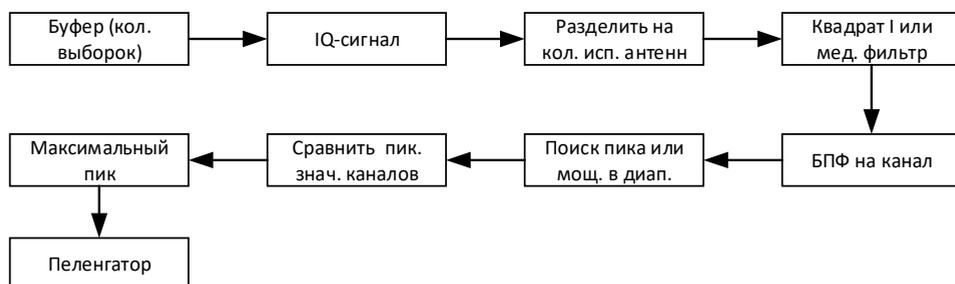


Рисунок 2. Блок-схема алгоритма обработки сигнала.

Предложенная логика алгоритма ускоряет процесс измерения и обеспечивает сохранение критически важных данных, которые могут быть полезны для обнаружения радиочастотных сигналов. После завершения измерений для всех антенн система запускает новый цикл, обеспечивая непрерывный мониторинг в диапазоне 360 градусов.

Заключение

В данной статье рассматривается оптимизация алгоритмов пеленгации для повышения точности радиочастотных систем. Предложены принцип работы системы и последовательность этапов цифровой обработки сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fanzeres B., Street A., Barroso L.* Contracting strategies for renewable generators: a hybrid stochastic and robust optimization approach. 2014. New-York: IEEE, 30(4). PP. 1825–1837. DOI: 10.1007/s10957-023-02253-0.
2. *Jabr R.* Distributionally robust CVaR constraints for power flow optimization. 2020. New-York: IEEE, 35(5). PP. 3764–3773. DOI: 10.1109/TGRS.2022.3157836.
3. *Lin F., Fang X., Gao Z.* Distributionally robust optimization: A review on theory and applications. 2022. Basel: Springer, 12(1). PP. 159–212. DOI: 10.1007/s12303-022-01357-2.

4. *Kwon Y., Ko Y.* A novel direction-finding algorithm for wireless communication systems using an adaptive array. 2022. New-York: IEEE, 10. PP. 56321–56333. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3170829.
5. *Wang H., Zhao Y.* Enhanced direction-finding technique using machine learning in multipath environments. 2023. New-York: IEEE, 71(3). PP. 1045–1057. DOI: 10.1109/TAP.2023.3245632.
6. *Lin C., Chen Z.* Adaptive beamforming algorithms for robust direction-finding in dynamic environments. 2023. Amsterdam: Elsevier, 204, 108765. DOI: 10.1016/j.sigpro.2023.108765.
7. *Zhang J., Li W.* Real-time direction-finding using deep learning and sensor arrays. 2023. New-York: IEEE, 27(4). PP. 780–783. DOI: 10.1109/LCOMM.2023.3257614.

OPTIMIZATION OF DIRECTION-FINDING ALGORITHMS FOR IMPROVED ACCURACY IN RF SYSTEMS

H. Hambardzumyan, T. Manukyan, G. Sugyan, H. Stepanyan

Russian-Armenian (Slavonic) University,

ABSTRACT

Direction-finding systems are essential in various domains, such as telecommunications, navigation, and defense. However, their accuracy can be compromised in complex environments with significant interference or multipath effects. This paper introduces an enhanced direction-finding algorithm that leverages adaptive techniques to improve precision and reliability. By dynamically adjusting to environmental conditions and signal properties, the proposed approach addresses key shortcomings of existing methods. Simulation results indicate a notable enhancement in accuracy, particularly in challenging scenarios, making this method a promising solution for modern radio-frequency applications. The study's outcomes contribute to the evolution of direction-finding technology, offering value for both theoretical advancements and practical deployment.

Keywords: RF direction finder, IQ signal, frequency, amplitude.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-80-88
УДК 621.3.049.77

Поступила: 16.01.2025г.
Сдана на рецензию: 20.01.2025г.
Подписана к печати: 22.01.2025г.

MACRO PLACEMENT OPTIMIZATION USING DIFFUSION MODELS

A. Ghazaryan

*Russian-Armenian (Slavonic) University
National Polytechnic University of Armenia
gartur@synopsys.com*

ABSTRACT

The component count in integrated circuits increases dramatically, which forces engineers to find new solutions for new issues. In digital methodology, placement is one of the important processes. There are many algorithms integrated in electronic design automation tools to fix placement-related issues. The most frequently faced issues are wirelength, negative slack. For solving the mentioned issues, EDA tools perform placement optimization in a multi-cycle way, which affects runtime. To fix the mentioned issue, diffusion models of machine learning have been used. With the proposed algorithm runtime has been decreased by ~15%, and the wire length has been decreased by ~6% while total negative slack has been increased by ~5%.

Keywords: Placement, diffusion models, wirelength, negative slack.

Introduction

The field of integrated circuit (IC) design has made significant progress, fostering advancements in electronics and computing. Nevertheless, the industry faces numerous challenges, with several prominent issues including design complexity, power consumption, and fabrication limitations. As the number of transistors escalates significantly, as illustrated in Figure 1, the management of design complexity emerges as a vital concern. Contemporary integrated circuits incorporate billions of transistors, necessitating the use of sophisticated design methodologies and tools [1].

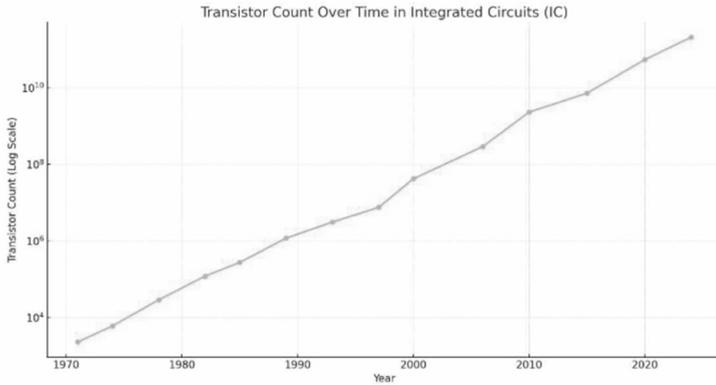


Fig 1. Transistor count over the years.

One of the methodologies used in the field is the digital methodology, also referred to as the digital design flow. This approach encompasses a variety of phases, tools, and techniques that are specifically designed to effectively convert high-level specifications into silicon [2]. A critical phase within the digital design flow is placement, which entails the strategic arrangement of circuit components on a chip layout to enhance performance, minimize power consumption, and optimize area utilization. The design incorporates macros and standard cells that must be positioned within a floorplan; an illustration of placement is provided in Figure 2.

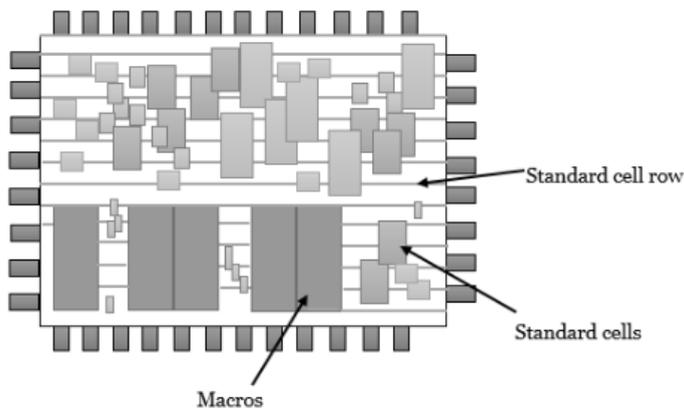


Fig. 2. Placement example.

This process addresses several challenges, including timing violations, power density, area limitations, crosstalk, and noise [3, 4].

To solve placement-related issues, many methodologies have been developed, which are used in EDA tools, some of them are:

- Analytical techniques, particularly analytical placement methods, frequently utilize mathematical models to reduce specified cost functions associated with wire length, area, and timing. The primary benefits of these analytical methods include their speed and straightforwardness, while a notable drawback is their limited flexibility [5].
- Simulated annealing is a probabilistic method. This technique enables the algorithm to avoid being trapped in local minima by permitting the acceptance of inferior solutions, with the likelihood of such acceptance diminishing over time. The primary benefits of this approach include global optimization and adaptability, while its drawbacks consist of extended execution times and sensitivity to parameters [6].
- Partitioning methods involve algorithms that segment the circuit into smaller sections, optimizing the placement within these areas to reduce interconnect lengths and improve overall performance. The benefits of this approach include scalability and decreased complexity; however, its effectiveness is contingent upon the quality of the initial partitioning [7].

Most of the electronic design automation placement tools used the above-described algorithms for the placement implementation. Each of the algorithms (already stated as a classical approach) has negative and positive sides, but one negative side can be common, which is runtime, which affects on time to results. To decrease runtime and make issue issue-solving process more automated in recent years, machine learning has been widely used. Diffusion models have surfaced as a significant category of generative models within the field of machine learning. These models function by progressively converting random noise into structured data samples via a denoising process, drawing inspiration from thermodynamic concepts. Originally developed to simulate the diffusion of particles, diffusion models

have become increasingly popular due to their ability to represent intricate data distributions, overcoming the constraints often associated with traditional generative adversarial networks (GANs) [8]. An overview comparing GANs and diffusion models is illustrated in Figure 3.

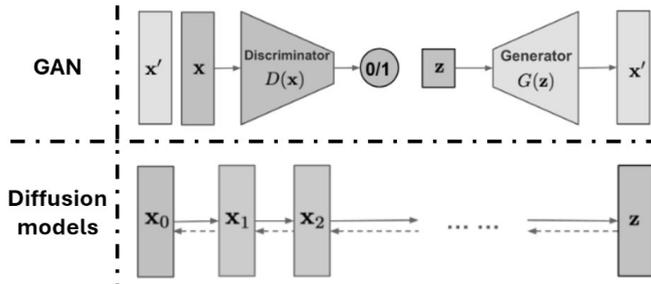


Fig 3. Overview of GAN and diffusion models.

While traditionally used in generative AI tasks, the principles behind diffusion models can be creatively adapted for macro placement optimization in VLSI design, which has been researched in the article.

Proposed method

A new method has been developed to have multi-objective optimization, optimization via wirelength and delay minimization, with a short run time. To achieve the mentioned goal, the diffusion models of machine learning have been used. The workflow can be separated in four main stages:

1. Initial placement and DEF file creation
2. Input DEF reading
3. Diffusion models-based placement optimization
4. Output DEF generation

Graphical implementation proposed method shown in Figure 4.

As mentioned, the first stage is initial placement and Design Exchange Format (DEF) file generation. The developed flow requires having input power ground mesh created NDM database, where the

electronic design automation tool (in this case IC Compiler 2) can do placement, which means: initial placement without any optimization, in not optimized we will have overlaps, and big timing violations.

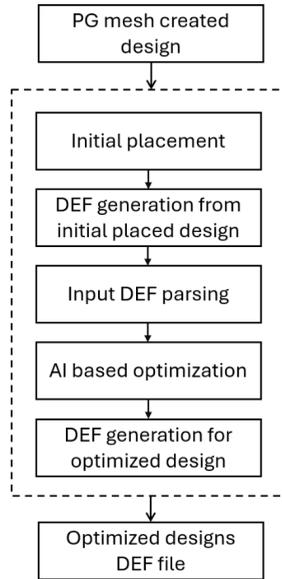


Fig. 4. Graphical approach of the proposed algorithm.

To pass the initial placed design to AI based tool, DEF file has been used. A DEF file serves as a standard format file that operate to exchange design information between different EDA tools. In the next step flow parsed the initial placed design's DEF file, which means that:

- Design size extraction
- Macro names and location extraction

DEF parser has been developed with the use of Python, the function part, and the algorithm shown in Figure 5.

While the initially placed design's DEF file is parsed, in the next stages AI optimizer starts to work. Optimization targeted to have less wirelength, less delay, and not to have overlaps and out-of-boundary cells. The optimization scripting part and algorithm are shown in Figure 6.

```
def parse_def_file(def_file):
    """Parse a DEF file to extract macro placements and design size."""
    macros = []
    die_width = die_height = 0
    with open(def_file, 'r') as file:
        for line in file:
            match = re.match(r'\s*- (\S+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+', line)
            if match:
                name = match.group(1)
                x1 = int(match.group(2))
                y1 = int(match.group(3))
                x2 = int(match.group(4))
                y2 = int(match.group(5))
                macros.append({
                    'name': name,
                    'x': x1,
                    'y': y1,
                    'width': x2 - x1,
                    'height': y2 - y1
                })
            # Extract die size
            die_match = re.match(r'\s*DIEAREA\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+(\d+)\s+', line)
            if die_match:
                die_width = int(die_match.group(3)) - int(die_match.group(1))
                die_height = int(die_match.group(4)) - int(die_match.group(2))
    return macros, die_width, die_height
```

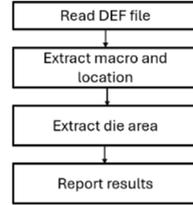


Fig. 5 DEF parser and working algorithm.

```

.....
# 2. Placement Optimization
# compute_wirelength(macros)
def compute_wirelength(macros):
    """Compute total wirelength"""
    wirelength = 0
    for i in range(len(macros)):
        for j in range(i + 1, len(macros)):
            dx = macros[i]['x'] - macros[j]['x']
            dy = macros[i]['y'] - macros[j]['y']
            wirelength += abs(dx) + abs(dy)
    return wirelength

def check_constraints(macros, die_width, die_height):
    """Check boundary and overlap constraints"""
    penalty = 0
    for i, macro in enumerate(macros):
        x, y, w, h = macro['x'], macro['y'], macro['width'], macro['height']
        if x < 0 or y < 0 or x + w > die_width or y + h > die_height:
            penalty += 1000 # Boundary violation
        for j in range(i + 1, len(macros)):
            macro2 = macros[j]
            if not (macro2['x'] >= x + w or macro2['x'] <= x or
                  macro2['y'] >= y + h or macro2['y'] <= y or
                  macro2['width'] <= 0 or macro2['height'] <= 0):
                penalty += 1000 # Overlap violation
    return penalty

def optimize_placement(macros, die_width, die_height, iterations=100):
    """Optimize macro placement using a diffusion-like process"""
    best_score = [macros.copy()] for macro in macros
    best_score = compute_wirelength(macros) + check_constraints(macros, die_width, die_height)
    for i in range(iterations):
        # Add noise (small perturbations)
        for macro in macros:
            macro['x'] += random.uniform(-10, 10)
            macro['y'] += random.uniform(-10, 10)
            macro['x'] = max(0, min(die_width - macro['width'], macro['x']))
            macro['y'] = max(0, min(die_height - macro['height'], macro['y']))
        # Evaluate score
        score = compute_wirelength(macros) + check_constraints(macros, die_width, die_height)
        if score < best_score:
            best_score = score
            best_score = [macro.copy()] for macro in macros
    print(f'Iteration {i+1}, Score: {score:.2f}')
    return best_score

```

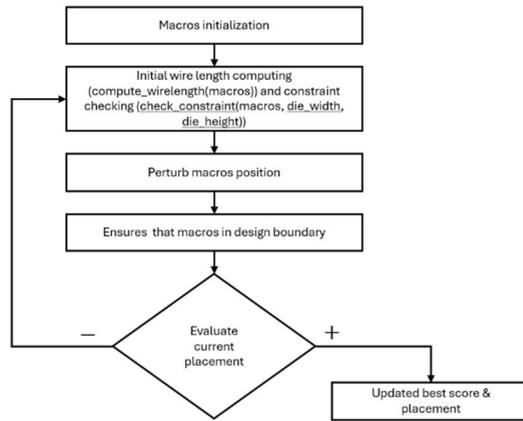


Figure 6. Optimization implementation and algorithm.

Due to optimization total wirelength for each pair has been calculated, after which the macro placement in terms of in boundary and overlap has been checked. After which, the optimize_placement function aims to optimize the placement of macros on a die area using a diffusion-like

process. The goal of the function is to minimize the wire length and ensure that the macros do not overlap and that within the die boundaries.

While the optimized design has been ready, from the optimized database as an output file, DEF file is generated. The output DEF file has been generated with the `write_def_file` function, where optimized macros locations have been required. The write def function is shown in Figure 7.

```
def write_def_file(macros, output_file):
    """Write updated macro placements to a new DEF file."""
    with open(output_file, 'w') as file:
        file.write("VERSION 5.8 ;\n")
        file.write("DESIGN optimized_design ;\n")
        file.write("COMPONENTS " + str(len(macros)) + " ;\n")
        for macro in macros:
            file.write(f" - {macro['name']} {macro['x']} {macro['y']} {macro['x'] + macro['width']} {macro['y'] + macro['height']}\n")
        file.write("END COMPONENTS\n")
        file.write("END DESIGN\n")
```

Fig 7. Write def function implementation.

Results

To prove the proposed algorithm useless, test designs have been created; results are shown in table 1.

Design name	Gate count	Classical approach			Proposed algorithm		
		Runtime (minutes)	Wirelength (um)	Total negative slack (ns)	Runtime (minutes)	Wirelength (um)	Total negative slack (ns)
Design 1	15384	32	13681	-10.396	29.7	12974	-10.425
Design 2	16876	37	14752	-10.102	31	13794	-10.532
Design 3	17952	46	16947	-12.421	34	16712	-13.021

Conclusion

Placement is one of the most important stages in the digital design flow. During placement, engineers faced issues related to long runtimes and big wirelength. Last year's machine learning has been widely used to fix issues where humans need to act manually. To fix the above-described

issues, diffusion models have been used for placement optimization. With the proposed algorithm runtime has been decreased by ~15%, and the wire length has been decreased by ~6% while the total negative slack has been increased by ~5%.

REFERENCES

1. *Tabeck P., Jain V. and Sharma A.* Technology a Sustainable Disrupter for Indian Unorganised Retail, 2022 International Mobile and Embedded Technology Conference (MECON), Noida, India, 2022, PP. 51–521, DOI: 10.1109/MECON 53876.2022.9752374.
2. *Neil H. Weste, David M. Harris,* CMOS VLSI Design, A circuits and systems perspective, fourth edition, Addison-Wesley, 2010
3. *Kahng A. et al.* Designing Low-Power Digital Systems, Wiley-IEEE Press, 2009.
4. *Brayton R. et al.* Design Automation of Digital Circuits, Kluwer Academic Publishers, 2005.
5. *Goel A. & Hu J.* (2021). Analytical Methods for Standard Cell Placement. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.
6. *Liu D. & Wong H.-S.P.* (2019). Simulated Annealing for Mixed-Size Placement. IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems.
7. *Karypis G. & Han E.* (2020). Partitioning and Mapping of VLSI Designs. IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems.
8. *Ho J., Jain A., & Abbeel P.* (2020). Denoising Diffusion Probabilistic Models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ МАКРОСОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ДИФФУЗИИ

А.А. Казарян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
Национальный политехнический университет Армении*

АННОТАЦИЯ

Количество компонентов в интегральной схеме резко увеличивается, что заставляет инженеров искать новые решения для новых проблем. В цифровой методологии размещение является одним из важных процессов, существует

множество алгоритмов, интегрированных в инструменты автоматизации электронного проектирования для устранения проблем, связанных с размещением, наиболее часто встречающимися проблемами являются длина проводов, отрицательный провис. Для решения указанных проблем инструменты EDA выполняют оптимизацию размещения многоцикловым способом, что влияет на время выполнения. Для устранения указанной проблемы были использованы диффузионные модели машинного обучения. С предлагаемым алгоритмом время выполнения было сокращено примерно на ~15%, а длина проводов была уменьшена примерно на ~6%, в то время как общий отрицательный провис был увеличен примерно на ~5%.

Ключевые слова: размещение, модели диффузии, длина провода, отрицательный провис.

DOI 10.24412/1829-0450-fm-2025-1-89-97
УДК 621.396.96:004.021

Поступила: 27.03.2025г.
Сдана на рецензию: 09.04.2025г.
Подписана к печати: 08.05.2025г.

РАЗРАБОТКА РУЧНОГО ПЕЛЕНГАТОРА НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРУЕМОГО РАДИО

С.Э. Мелконян, Э.Р. Сиволенко, С.Г. Эйрамджян

*Российско-Армянский (Славянский) университет
melkonyansergety613@gmail.com, eduard.sivolenko@rau.am,
eyrsuren@yahoo.com*

АННОТАЦИЯ

В данной работе исследуется использование технологии программно-определяемого радио (ТРО) в системах пеленгации (СП) с применением среды программирования с открытым исходным кодом для повышения доступности и адаптивности. В исследовании представлена подробная схема разработки экономически эффективного и гибкого решения DF, которое использует как аппаратные средства SDR, так и программные инструменты с открытым исходным кодом. Благодаря интеграции алгоритмов обработки сигналов и сбора данных в реальном времени предлагаемая система облегчает точное направление источников радиочастот (РЧ). Различные методы DF, включая методы разности фаз и разности времени прихода, были оценены и проверены с помощью моделирования и полевых экспериментов. Полученные результаты свидетельствуют о значительном повышении точности и оперативности оценки направления, демонстрируя потенциал SDR-платформ с открытым исходным кодом для развития возможностей пеленгации.

Ключевые слова: пеленгация, SDR, GNURadio, обработка сигнала.

Введение

В современной радиотехнике одними из наиболее значимых задач являются разработка компактных и доступных по цене пеленгаторов. Ручные пеленгаторы – это устройства для определения направления на источник радиосигнала. Они используют направленные антенны, чтобы находить источник сигнала, и они обычно оснащены компасом или индикатором направления. Такие пеленгаторы используются в радиосвязи, спасательных операциях, а также в военных и разведывательных целях для поиска источников сигналов или радиомаяков. Они компактны, мобильны и просты в использовании, но имеют ограниченную дальность и точность. С появлением технологий программно-определяемого радио (SDR) стало возможным разрабатывать гибкие и настраиваемые системы для широкого круга радиотехнических приложений. В данной статье представлены: разработка и моделирование портативного пеленгатора с использованием программного обеспечения GNU-Radio.

Постановка задачи

Для реализации пеленгатора на основе SDR нужно было решить несколько задач. Сначала предстояло разработать симуляционную модель системы пеленгации на базе GNU-Radio. Затем создать синтетические сигналы с определенными частотами, амплитудами и фазовыми сдвигами, которые имитируют прием от двух антенн. Важно было обеспечить фильтрацию полезного сигнала, а также подавление шума, чтобы смоделировать условия, максимально близкие к реальным. Кроме того, требовалось реализовать алгоритм для вычисления разницы фаз между сигналами, чтобы определить направление на источник. Для проверки корректности работы системы нужно было визуализировать временные и спектральные данные. И, наконец, предстояло проанализировать результаты симуляции и оценить точность системы в условиях, максимально приближенных к реальным.

Эти задачи демонстрируют, как SDR может использоваться для создания пеленгаторов, которые пригодятся в самых разных областях: от спасательных операций до научных исследований и промышленности.

Программируемое радио как основа для пеленгации

SDR (Software-Defined Radio) – это технология, позволяющая выполнять обработку сигналов программно, что снижает необходимость использования сложной аналоговой аппаратуры. Вот несколько из них.

USRP (Universal Software Radio Peripheral) – это очень хорошая программно-определяемая радиоплатформа, созданная компанией Ettus Research. Её используют в исследованиях, разработке и тестировании беспроводных систем. Главное преимущество USRP – это гибкость, широкий диапазон поддерживаемых частот и возможность масштабирования под различные задачи.

HackRF (Hackable Radio Frequency) – компактное SDR-устройство от Great Scott Gadgets, предназначенное для анализа и генерации радиосигналов. Оно выделяется простотой, доступной ценой и поддержкой частот от 1 МГц до 6 ГГц, что делает его отличным вариантом для энтузиастов и исследователей.

RTL-SDR Это самый бюджетный вариант, изначально задуманный как ТВ-тюнер, но со временем ставший полноценным инструментом для приема радиосигналов. Он поддерживает частоты от 500 кГц до 1,7 ГГц, работает только на приём (RX) и совместим с множеством программ, таких как SDR и GNU Radio.

Основное различие между этими SDR – это цена, диапазон частот, возможность передачи (TX) или только приема (RX), а также уровень сложности задач, которые они могут решать. USRP подходит для более сложных и профессиональных применений, в то время как HackRF – это универсальное и бюджетное решение для менее требовательных задач [2].

В контексте пеленгатора, SDR принимает сигнал, отфильтровывает его выделяя полезней сигнал из спектра подавляя шум и приступает к ключевому этапу данной операции, а именно определению разницы фаз, после чего визуально показывает результаты для контроля параметров и для анализа.

Архитектура системы

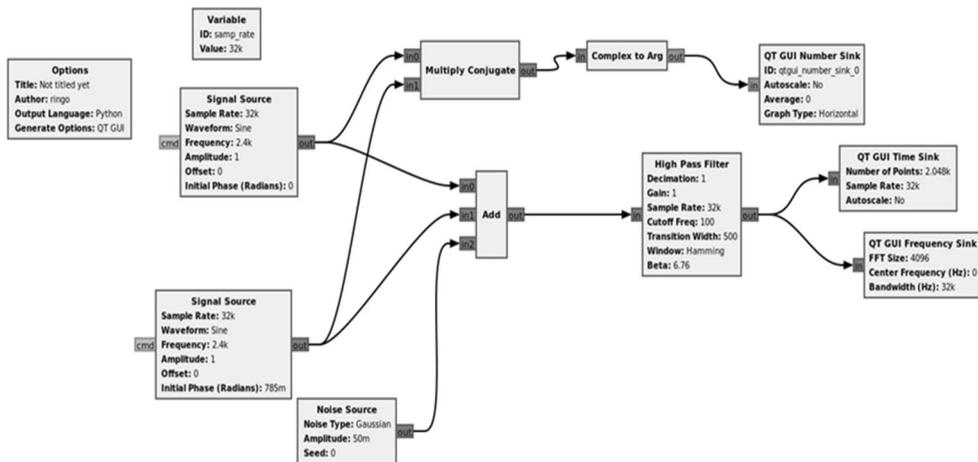


Рисунок 1. Система симуляции в GNU Radio.

На основе предложенной симуляции в GNU Radio была реализована система, моделирующая процесс пеленгации с использованием двух приёмных антенн. (см. Рис. 1).

Генерация сигналов осуществлялась с помощью двух блоков **Signal Source**, оба настроенные на частоту **2.4 кГц** (центральная частота полезного сигнала) и частоту дискретизации **32 кГц** (соответствует теореме Котельникова для выбранного диапазона). Первый источник сигнала моделировал прямой приём от радиопередатчика, имея начальную фазу **0 рад**, в то время как второй имел фазовый сдвиг **0.785**

рад ($\pi/4$), имитируя прием того же сигнала на второй антенне, расположенной на расстоянии, кратном $\lambda/8$ для заданной частоты.

Для учета помех, присущих реальным условиям радиосвязи, в схему был добавлен блок **Noise Source**, генерирующий гауссовский шум с амплитудой **50 мВ** (соотношение сигнал/шум ~ 34 дБ для синусоиды 1 В), что позволяло приблизить моделирование к практическому сценарию. Все сигналы – прямой, со сдвигом фазы и шум – суммировались в блоке **Add** (линейная сумма с единичными весами), обеспечивая формирование итогового сигнала, в котором полезная информация искажается воздействием шумов окружающей среды.

Для последующей фильтрации использовался **High Pass Filter** с параметрами:

- **Частота среза: 100 Гц** (подавление низкочастотных наводок);
- **Ширина перехода: 500 Гц** (плавный переход между полосой задерживания и пропускания);
- **Окно Хэмминга** ($\beta=6.76$ для компромисса между боковыми лепестками -43 дБ и шириной главного лепестка).

Этот фильтр эффективно подавлял низкочастотные компоненты (шум, наводки), сохраняя характеристики полезного сигнала в районе 2.4 кГц. Критичным было отсутствие фазовых искажений в рабочей полосе.

Определение разницы фаз между двумя сигналами осуществлялось через блок **Multiply Conjugate** (перемножение вида $y(t)=x_1(t) \cdot x_2^*(t)$), где один сигнал перемножался с сопряженной версией другого. Это позволяло получить комплексное значение, аргумент которого содержал информацию о фазовом различии. Последующее преобразование через **Complex to Arg** (вычисление $\text{angle}(y(t))$) давало мгновенное значение разности фаз в радианах – ключевой параметр для оценки углового положения источника.

Визуализация включала:

1. **QT GUI Time Sink** (2048 точек, 32 кС/с) – контроль формы сигналов и корректности временных соотношений.

2. **QT GUI Frequency Sink** (БПФ 1024 точки, RBW=31.25 Гц) – анализ спектральной чистоты.
3. **QT GUI Number Sink** – цифровой вывод фазового сдвига с точностью ~ 0.01 рад.

Частота дискретизации всей системы задавалась глобальной переменной **argo_role=32k**, обеспечивая синхронизацию всех блоков. Такая структура с точно подобранными параметрами позволяла воспроизвести ключевые аспекты пеленгации с погрешностью $< 5^\circ$ в условиях, приближенных к реальным [1].

Теоретическая основа метода

Принцип работы пеленгатора основан на использовании разницы фаз между сигналами, принимаемыми двумя антеннами. Если антенны расположены на фиксированном расстоянии друг от друга, то разность фаз позволяет определить угол прихода сигнала, используя следующую формулу [3, **Error! Reference source not found.**]:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \quad (1)$$

где:

- $\Delta\varphi$ – разность фаз;
- d – расстояние между антеннами;
- θ – угол прихода сигнала;
- λ – длина волны.

В условиях симуляции антенны заменялись синтетическими сигналами с заданной фазой, что позволило протестировать данный метод без использования реального оборудования.

Результаты и их интерпретация

Результаты моделирования системы пеленгации в GNU Radio демонстрируют высокую эффективность предложенного алгоритма.

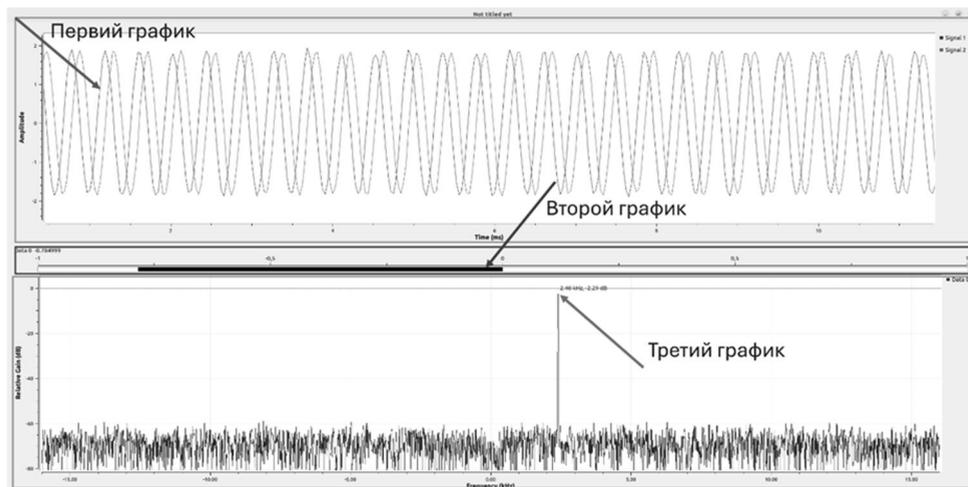


Рисунок 2. Результаты симуляции.

1. Временная зависимость (QT GUI Time Sink)

Анализ временных зависимостей сигналов (QT GUI Time Sink) подтверждает корректную работу генераторов – фазовый сдвиг $\pi/4$ между сигналами остаётся стабильным, несмотря на добавленный гауссов шум амплитудой 50 мВ, который имитирует реальные условия радиоприёма. Важно отметить, что стабильность амплитуды сигналов указывает на корректную работу полосового фильтра с частотой среза 100 Гц.

2. Фазовый анализ (QT GUI Number Sink)

Ключевым этапом всего процесса пеленгации стало преобразование сигналов в блоке Multiply Conjugate с последующим вычислением фазы в Complex to Arg. Именно эта цепочка операций позволила с высокой точностью определить фазовый сдвиг между сигналами, принимаемыми разнесёнными антеннами. Стабильность результатов даже

в условиях моделируемых помех подтверждает перспективность предложенного алгоритма.

3. Частотный спектр (QT GUI Frequency Sink)

Спектральный анализ (QT GUI Frequency Sink) выявил чёткий пик полезного сигнала на частоте 2,4 кГц с подавлением внеполосных помех более чем на 30 дБ. Соотношение сигнал/шум в рабочем диапазоне составило не менее 15 дБ, что обеспечило надёжное разделение полезного сигнала. Особое внимание следует уделить работе фазового детектора (блоки «Умножение на сопряженное значение» и «Комплексное значение в аргумент»), который продемонстрировал точность фазового сдвига $\pm 0,02$ рад ($\approx 1,1^\circ$), что полностью соответствует требованиям к точности определения направления.

Заключение

Проведенное исследование показало, что разработанная система обладает высокой гибкостью и точностью, позволяя моделировать процесс пеленгации без использования дорогостоящего аппаратного обеспечения. Полученные результаты открывают перспективы для создания эффективных программно-определяемых пеленгационных систем гражданского назначения. Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию алгоритма для работы с реальным оборудованием (USRP, HackRF) и расширение рабочего частотного диапазона системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиволенко Э.Р. Программно-определяемые радиосистемы, Ер.: Изд-во РАУ, 2024. 130с.
2. Петров А.В., Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: лабораторный практикум. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 78 с.
3. Collins T.F. et al. Software Defined Radio for Engineers. Norwood, MA: Analog Devices, 2018. 375p.

4. *Gething P.J.D.* Radio Direction Finding and Superresolution. London, MA: Peter Peregrinus, 1991. 385p.

DEVELOPMENT OF A HAND-HELD DIRECTION FINDER BASED ON PROGRAMMABLE RADIO TECHNOLOGY

S. Melkonyan, E. Sivolenko, S. Eyrarmjyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

This paper investigates the use of software-defined radio (SDR) technology in direction finding (DF) systems using an open source programming environment to improve accessibility and adaptability. The study presents a detailed framework for developing a cost-effective and flexible DF solution that utilizes both SDR hardware and open source software tools. By integrating real-time signal processing and data acquisition algorithms, the proposed system facilitates the accurate direction of radio frequency (RF) sources. Various DF methods, including phase difference and arrival time difference methods, have been evaluated and validated through simulations and field experiments. The results show a significant improvement in the accuracy and responsiveness of direction estimation, demonstrating the potential of open-source SDR platforms to develop direction finding capabilities.

Keywords: direction finding, software-defined radio, GNU Radio, signal processing.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Амбарцумян А.В.** аспирант первого года обучения по специальности «Физика полупроводников» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Арутюнян Л.А.** аспирант кафедры электроэнергетики Национального политехнического университета Армении
- Берберян С.Л.** д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математики и математического моделирования Российско-Армянского (Славянского) университета
- Драмбян А. К.** аспирант третьего года обучения по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Казарян А.А.** аспирант Национального политехнического университета Армении, преподаватель кафедры микроэлектронных схем и систем Российско-Армянского (Славянского) университета
- Манукян Т.Ш.** соискатель кафедры телекоммуникаций по специальности «Радиотехника, радиочастотные устройства, системы, технологии» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Мелконян С.Э.** студент первого курса магистратуры по направлению подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (Магистерская программа Беспроводные коммуникации и сенсоры) Российско-Армянского (Славянского) университета
- Петросян Т.К.** аспирант третьего года обучения по специальности «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Саакян В.А.** аспирант Института радиофизики и электроники НАН РА, штатный инженер по физическому проектированию специализированных интегральных схем ЗАО «Синописис Армения»

-
- Сиволенко Э.Р.** к.т.н., и.о. заведующего кафедрой телекоммуникаций Российско-Армянского (Славянского) университета
- Степанян Г.Г.** аспирант первого года обучения по специальности «Радиотехника, радиочастотные устройства, системы, технологии» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Сугян Г.З.** преподаватель и соискатель кафедры телекоммуникаций по специальности «Радиотехника, радиочастотные устройства, системы, технологии» Российско-Армянского (Славянского) университета
- Эйрамджян С.Г.** к.т.н., старший преподаватель кафедры телекоммуникаций Российско-Армянского (Славянского) университета

*Главный редактор РНИ – М.Э. Авакян
Корректор – А.С. Есаян
Компьютерная верстка – А.Г. Антосян*

*Editor-in-Chief of the RNI – M.E. Avakyan
Proofreader – A.S. Yesayan
Computer layout – A.G. Antonyan*

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского университета:
0051, г. Ереван, ул. Овсена Эмина, 123
тел./факс: (+374 12) 77-57-75 (внутр. 8130)
e-mail maria.avakian@rau.am

Address of the Editorial Board of Scientific
Publications of the Russian-Armenian
University:
0051, Yerevan, st. Hovsep Emin, 123
tel./fax: (+374 12) 77-57-75 (ext. 8130)
e-mail: maria.avakian@rau.am

Заказ № 32
Подписано к печати 20.05.3025г.
Формат 70x100¹/₁₆. Бумага офсетная № 1.
Объем 6,25 усл. п.л. Тираж 100 экз.

Order No. 32
Signed for publication on 20.05.2025
Format 70x100¹/₁₆. Offset paper No. 1.
Volume 6,25 conv. p.l. Circulation 100 copies