



Russian-Armenian University

*Printed by the decision of the
Academic Council of RAU*

V E S T N I K
OF RUSSIAN-ARMENIAN UNIVERSITY
(SERIES: PHYSICAL-MATHEMATICAL
AND NATURAL SCIENCES)

RAU University Press
No. 1/2023

Российско-Армянский университет

*Печатается по решению
Ученого Совета РАУ*

В Е С Т Н И К
РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
(СЕРИЯ: ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ)

Издательство РАУ
№ 1/2023

Главный редактор: академик НАН РА, д.ф.-м.н., проф. *Казарян Э.М.*

Зам. главного редактора: к.ф.-м.н., д.филос.н., проф. *Аветисян П.С.*

Ответственный секретарь: к.х.н. *Шагинян Р.С.*

Редакционная коллегия:

Математика и информатика

Р.Г. Арамян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Институт Математики НАН РА

Д.Г. Асатрян – д.т.н., проф., Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Г.Г. Казарян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

О.В. Бесов – член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

В.И. Буренков – д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

А.Г. Сергеев – академик РАН, д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (Россия)

А.И. Аветисян – академик РАН, д.ф.-м.н., проф., Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН (Россия)

В.Ш. Меликян – член-корр. НАН РА, д.т.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Synopsys

Биологические и химические науки

А.А. Аракелян – д.б.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ), Институт Молекулярной биологии НАН РА

В.И. Муронца – д.б.н., проф., Московский государственный университет (МГУ) (Россия)

А.А. Оганесян – к.б.н., доц., Российско-Армянский университет (РАУ)

Р.В. Захарян – к.б.н., Российско-Армянский университет (РАУ)

Г.Г. Данагулян – член-корр. НАН РА, д.х.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

К.Б. Назарян – д.б.н., проф., Институт Молекулярной биологии НАН РА

Л.М. Епископосян – д.б.н., проф., Институт Молекулярной биологии НАН РА

А.Б. Киракосян – д.б.н., проф., Массачусетский технологический институт (США)

Физико-технические науки

Д.А. Фирсов – д.ф.-м.н., проф., СПбПУ им. Петра Великого (Россия)

А.В. Папоян – член-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., проф., Институт физических исследований НАН РА

С.Г. Петросян – член-корр. НАНРА, д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

А.А. Саркисян – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

Е.Ш. Мамасахлисов – д.ф.-м.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

В.Г. Аветисян – д.т.н., проф., Российско-Армянский университет (РАУ)

Журнал основан в 2003 году и входит в перечень периодических изданий, зарегистрированных ВАК РА и РИНЦ

Editor-in-Chief: Academician of NAS RA, D.Sc. in Physics and Mathematics,
Prof. **Kazaryan E.M.**

Deputy Editor-in-chief: Ph.D. in Mathematics, D. Sc. in Philosophy, Prof. **Avetisyan P.S.**

Executive secretary: Ph.D. in Science (Chemistry) **Shaginyan R.S.**

Editorial team

Mathematics and Computer Science

R.G. Aramyan – D. Sc. (Mathematics), Prof., Russian-Armenian University (RAU), Institute of Mathematics NAS RA

D.G. Asatryan – D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Institute of Informatics and Automation Problems of NAS RA

G.G. Kazaryan – D. Sc. (Mathematics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

O.V. Besov – corresponding member of RAS, D. Sc. (Mathematics), Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

I.A. Burenkov – D. Sc., Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

A.G. Sergeev – Academician of the Russian Academy of Sciences, D. Sc. (Mathematics), Prof., Mathematical Institute Named after V.A. Steklov RAS (Russia)

A.I. Avetisyan – Academician of the Russian Academy of Sciences, D. Sc. (Mathematics), Prof., Institute of System Programming Named after V.P. Ivannikov RAS (Russia)

V.Sh. Melikyan – corresponding member of NAS RA, D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Russian-Armenian University (RAU), Synopsys

Biological and Chemical Sciences

A.A. Arakelyan – D. Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

I.A. Muronets – D. Sc. (Biology), Prof., Moscow State University (Russia)

A.A. Hovhannisyan – Ph.D. in Science (Biology), Russian-Armenian University (RAU)

R.V. Zakharyan – Ph.D. in Science (Biology), Russian-Armenian University (RAU)

G.G. Danagulyan – corresponding member of NASRA, D. Sc. (Chemistry), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

K.B. Nazaryan – D.Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

L.M. Episkoposyan – D.Sc. (Biology), Prof., Institute of Molecular Biology NAS RA

A.B. Kirakosyan – D.Sc. (Biology), Prof., Massachusetts Institute of Technology (USA)

Physical and Technical Sciences

D.A. Firsov – D. Sc. (Physics), Prof., SPbPU Named after Peter the Great (Russia)

A.V. Papoyan – corresponding member of NAS RA, D.Sc. (Physics), Prof., Institute of Physical Research NAS RA

S.G. Petrosyan – corresponding member of NAS RA, D. Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

A.A. Sargsyan – D.Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

E.S. Mamasakhlisov – D.Sc. (Physics), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

V.G. Avetisyan – D. Sc. (Technical Sciences), Prof., Russian-Armenian University (RAU)

The journal founded in 2003 is included in the list of periodicals registered by HAC RA and RSCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Математика и механика

- Акопян А.Р.** Об отсутствии решения одной системы
нелинейных бесконечных алгебраических уравнений
с матрицами типа Теплица 7
- Manukyan A., Mikaelyan H.** On Antimagic Edge Colorings
of Simple Cycles and Regular Bipartite Graphs 16
- Арамян Э.Р.** Представления для распределения длины
случайной хорды по направлению выпуклых фигур 25
- Karamyan D.** Text Realignment for Speaker Diarisation 34
- Кроян А.К.** О разрешимости одной бесконечной двумерной
нелинейной алгебраической системы типа Теплица 44
- Galoyan H.** Design and Analysis of a Novel Tripteron-Inspired
Micromanipulator with Flexure Hinges 54
- Карапетян М.Р.** О свободных полугруппах втоморфизмов
свободных периодических групп 65

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.48200/1829-0450_pmn_2023_1_7
УДК 517.988.63

Поступила: 21.03.2023г.
Сдана на рецензию: 30.03.2023г.
Подписана к печати: 10.04.2023г.

ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ ТИПА ТЕПЛИЦА

А.Р. Акопян

Российско-Армянский (Славянский) университет

alexander.hakobyan@gmail.com

АННОТАЦИЯ

Данная статья посвящена исследованию одной системы бесконечных алгебраических уравнений с монотонной нелинейностью. Система таких уравнений имеет приложения в дискретных задачах теории p -адических струн и математической биологии. Доказывается отсутствие знаковосохраненного решения для этой системы в классе ограниченных последовательностей. В конце приводятся конкретные примеры прикладного характера.

Ключевые слова: нелинейность, бесконечная система, выпуклость, монотонность, последовательность.

1. Введение

В настоящей статье исследуется следующий класс нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений на $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

$$Q(x_n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} x_j, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

относительно бесконечного вектора $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T$, где T – знак транспонирования.

В системе (1) последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $a_n > 0$, $a_n = a_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a_n \downarrow n \in \mathbb{N}$,

б) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 1$, $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \cdot |j| < \infty$.

Нелинейность Q обладает свойствами:

1) $Q(-x) = -Q(x)$, $Q(x) \uparrow x \in \mathbb{R}$,

2) $Q(x)$ строго выпукла вниз на $[0; +\infty)$ и существует число $\eta > 0$, такое, что $Q(\eta) = \eta$

Решение системы (1) ищется в классе ограниченных последовательностей m :

$$m := \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T : \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < +\infty \right\}.$$

Система (1), кроме чисто математического интереса, имеет приложения в дискретных задачах динамической теории р-адических открытых или открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [1–3]). Кроме того, системы подобного характера встречаются в математической теории распространения эпидемических заболеваний в рамках дискретной модели Дикмана-Каппера (см. [4–5]).

Вопросы существования и единственности знакопеременного ограниченного решения системы (1) (и его двумерного аналога) в определенном подклассе ограниченных последовательностей: $x \in m$, $x_{-n} = -x_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\eta - x \in l_1$, обсуждались в работе [6].

Основной целью настоящей работы является доказательство отсутствия нетривиального знаковосхраненного ограниченного решения.

На самом деле мы докажем, что система (1) в классе ограниченных бесконечных векторов, координаты которых неотрицательны (неположительны), кроме тривиальных решений 0 и η (0 и $-\eta$), других решений не имеет. Доказательство этого факта получается с помощью двух вспомогательных лемм, имеющих самостоятельный интерес.

В конце работы мы также приведем конкретные прикладные примеры последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и нелинейности Q .

2. Вспомогательные факты

Следующая лемма играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 1. Пусть выполняются условия а), б), 1), 2). Тогда координаты любого решения $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T \in \mathcal{M}$ системы (1) удовлетворяют следующей двусторонней оценке:

$$-\eta \leq x_n \leq \eta, n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Предположим, что

$$C_0 := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| > \eta.$$

Из условий а), б) и 1) следует, что $Q(|x_n|) \leq C_0$, откуда получаем, что

$$Q(C_0) \leq C_0 \tag{2}$$

С другой стороны, принимая во внимание выпуклость и монотонность функции Q , легко заметить, что $\frac{Q(C_0)}{C_0} > 1$ (см. Рис. 1). Последнее утверждение противоречит неравенству (2). Таким образом, лемма доказана.

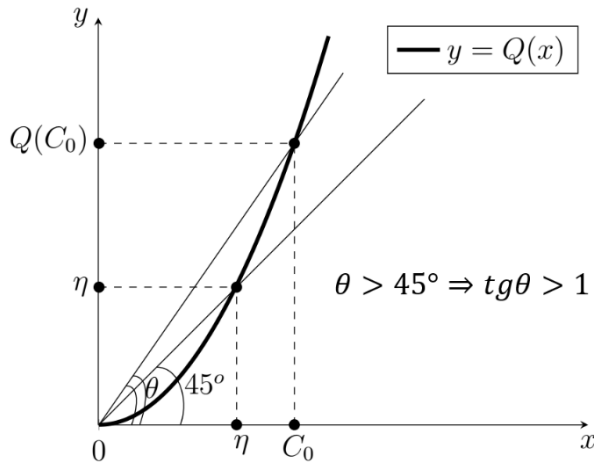


Рисунок 1.

Вторая лемма является ключевым фактом для доказательства основного результата настоящей работы.

Лемма 2. При условиях Леммы 1, если координаты решения $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T \in \mathcal{M}$ удовлетворяют условию $x_n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$, то $x_n \geq Q(x_n), n \in \mathbb{Z}$ и $x - Q(x) \in l_1$, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - Q(x_n)) < \infty.$$

Доказательство. Так как $x_n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$, то в силу Леммы 1 $0 \leq x_n \leq \eta, n \in \mathbb{Z}$. Откуда в силу условия 2) получаем, что $x_n \geq Q(x_n), n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $x - Q(x) \in l_1$.

Сперва покажем, что

$$\sum_{n=-\infty}^0 (x_n - Q(x_n)) < \infty.$$

В силу условий а), б) и 2), в силу неотрицательности последовательности x_n и утверждения Леммы 1, следующее соотношение верно для произвольного $r \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{n=-r}^0 (\eta - Q(x_n)) = \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} (\eta - x_j) \\
 &\leq \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=-r}^0 a_{n-j} (\eta - x_j) + \eta \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=-\infty}^{-r-1} a_{n-j} + \eta \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n-j} \\
 &= \sum_{j=-r}^0 (\eta - x_j) \sum_{n=-r}^0 a_{n-j} + \eta \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=n+r+1}^{+\infty} a_j + \eta \sum_{n=-r}^0 \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j.
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий а) и б)

$$0 \leq \sum_{n=-r}^0 (\eta - Q(x_n)) \leq \sum_{j=-r}^0 (\eta - x_j) + \eta \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{j=n}^{+\infty} a_j + \eta \sum_{n=-r-1}^{-1} \sum_{j=-\infty}^n a_j. \quad (3)$$

Заметим так же, что в силу условия б)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{j=n}^{+\infty} a_j &= \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{j=n}^{r+1} a_j + \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{j=r+2}^{+\infty} a_j \\
 &= \sum_{j=1}^{r+1} j a_j + \sum_{j=r+2}^{+\infty} a_j (r+1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j a_j, \quad (4)
 \end{aligned}$$

в силу четности последовательности a_n

$$\sum_{n=-r-1}^{-1} \sum_{j=-\infty}^n a_j = \sum_{n=1}^{r+1} \sum_{j=n}^{+\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{+\infty} j a_j. \quad (5)$$

В силу (4), (5) из (3), так как $\eta \geq x_n \geq Q(x_n), n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$0 \leq \sum_{n=-r}^0 (x_n - Q(x_n)) \leq 2\eta \sum_{j=1}^{+\infty} j a_j < \infty.$$

Устремив $r \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве, имеем

$$0 \leq \sum_{n=-\infty}^0 (x_n - Q(x_n)) \leq 2\eta \sum_{j=1}^{+\infty} ja_j < \infty.$$

Аналогично доказывается, что

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - Q(x_n)) \leq 2\eta \sum_{j=1}^{+\infty} ja_j < \infty.$$

Следовательно,

$$0 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n - Q(x_n)) \leq 4\eta \sum_{j=1}^{+\infty} ja_j < \infty. \quad (6)$$

Тем самым лемма доказана.

3. Основной результат и примеры

Основным результатом настоящей работы является следующая.

Теорема. При условиях а), б) и 1), 2) система (1) не обладает неотрицательным, нетривиальным и ограниченным решением.

Доказательство. Пусть система (1) обладает неотрицательным и ограниченным решением

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T.$$

Из условия б) имеем, что

$$\eta - Q(x_n) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j}(\eta - x_j), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Умножив обе стороны равенства (7) на $x_n - Q(x_n)$ и просуммировав для всех $n \in \mathbb{Z}$ (в силу Леммы 2, полученный ряд будет сходиться), получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - Q(x_n))(\eta - Q(x_n)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_n - Q(x_n)) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j}(\eta - x_j) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\eta - x_j) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} (x_n - Q(x_n)) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (\eta - x_j) \left(Q(x_j) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} Q(x_n) \right). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Так как функция Q выпукла вниз на $[0; +\infty)$ и ряд

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} x_j$$

сходится, то в силу неравенства Йенсена имеем, что

$$Q(Q(x_n)) = Q\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} x_j\right) \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{n-j} Q(x_j), n \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Из соотношений (8) и (9) имеем, что:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ (x_n - Q(x_n))(\eta - Q(x_n)) - (\eta - x_n)(Q(x_n) - Q(Q(x_n))) \right\} &\leq 0, \\
 n &\in \mathbb{Z}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Обозначим $E := \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < x_n < \eta\}$. Тогда неравенство (10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in E} (x_n - Q(x_n))(\eta - x_n) \left(\frac{\eta - Q(x_n)}{\eta - x_n} - \frac{Q(x_n) - Q(Q(x_n))}{x_n - Q(x_n)} \right) &\leq 0 \\
 n &\in \mathbb{Z}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Так как в силу условий 1) и 2) (см. Рис. 2)

$$\frac{\eta - Q(x_n)}{\eta - x_n} > \frac{Q(x_n) - Q(Q(x_n))}{x_n - Q(x_n)}, n \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

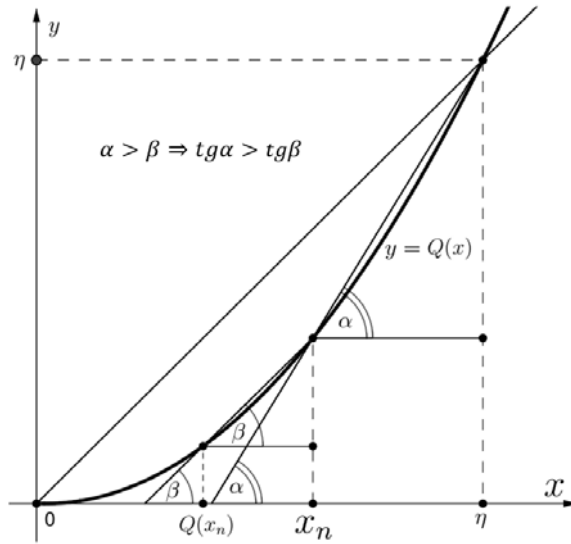


Рисунок 2.

получаем, что $E = \emptyset$. Следовательно, для всякого $n \in \mathbb{Z}$ либо $x_n = 0$, либо $x_n = \eta$. Следовательно, в силу неотрицательности последовательностей a_n и x_n , если $x_n \neq \eta$, то $x_n \equiv 0$. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Повторяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что при условиях Теоремы 1 система не может обладать положительным нетривиальным и ограниченным решением.

В конце рассмотрим конкретные примеры последовательности $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и функции $Q: i_1) a_n = q^{|n|} \frac{1-q}{1+q}$, $0 < q < 1$,

$$i_2) a_n = \frac{p^{|n|}}{|n|! (2e^p - 1)}, \quad p > 0,$$

$$k_1) Q(x) = c \cdot x^3 + (1 - c)x, \quad 0 < c \leq 1.$$

$$k_2) Q(x) = x^p, \quad p > 2 - \text{нечетное число.}$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю – д.ф.м.н., профессору Х.А. Хачатрян.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. О нелинейных уравнениях p -адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн, ТМФ, 149:3 (2006), 354–367.
2. Владимиров В.С., Волович Я.И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны, ТМФ, 138:3 (2004), 355–368.
3. Хачатрян Х.А. О разрешимости некоторых классов нелинейных сингулярных краевых задач, возникающих в теории p -адических открыто-замкнутых струн, ТМФ, 200:1 (2019), 106–117.
4. Diekmann O., Kapper H. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Anal*, 2 (1978), 721–737.
5. Khachatryan A., Khachatryan Kh. On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics // *Eurasian Math. J.*, 11:2 (2020), 52–64.
6. Khachatryan Kh., Andriyan S. On the solvability of a class of discrete matrix equations with cubic nonlinearity // *Ukrainian Math. Journal*, 71:12 (2020), 1910–1928.

ON THE ABSENCE OF A SOLUTION TO A SYSTEM OF NONLINEAR INFINITE ALGEBRAIC EQUATIONS WITH TOEPLITZ TYPE MATRIXES

A. Hakobyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

The work is devoted to the study of one system of infinite algebraic equations with monotone nonlinearity. The system of such equations has applications in discrete problems of p -adic string theory and mathematical biology. We prove that there is no sign-preserved solution for this system in the class of bounded sequences. At the end, concrete examples of an applied nature are given.

Keywords: nonlinearity, infinite system, convexity, monotonicity, sequence.

ON ANTIMAGIC EDGE COLORINGS OF SIMPLE CYCLES AND REGULAR BIPARTITE GRAPHS

A. Manukyan, H. Mikaelyan

Yerevan State University

avetiq.manukyan1@edu.y-su.am, hamletm2000@gmail.com

ABSTRACT

For a given graph G and a proper edge t -coloring α defined on G , denote by $\text{Sum}_G(v, \alpha)$, the sum of colors of edges neighboring v , where $v \in V(G)$. In that case, α is called an antimagic edge t -coloring of the graph G if for every pair of distinct vertices $v_1, v_2 \in V(G)$, $\text{Sum}_G(v_1, \alpha) \neq \text{Sum}_G(v_2, \alpha)$. The set of graphs G , for which there exists some t , such that G admits an antimagic edge t -coloring, is denoted by AM . For any graph $G \in AM$, let $\omega_{am}(G)$ mean the least positive integer t , for which G admits an antimagic edge t -coloring. In this paper, we determine or bound the parameter $\omega_{am}(G)$ for simple cycles and regular bipartite graphs.

Keywords: Antimagic edge-coloring, edge-coloring.

Introduction

Throughout the paper, all graphs are simple, finite, and undirected. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges of G , respectively. For $v \in V(G)$, we define $d_G(v)$ as the number of neighbors of v .

A proper edge t -coloring of graph G is a surjective mapping $\alpha: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ such that $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ for any pair of adjacent edges $e, e' \in E(G)$. Consider a proper edge coloring α . We denote $\text{Sum}_G(v, \alpha) =$

$\sum_{u \in N_G(v)} \alpha(uv)$. In some cases, we will use the notation $Sum(v)$ instead of $Sum_G(v, \alpha)$ if the graph and the coloring are evident from the context. A proper edge t -coloring of graph G , for which all the values $Sum(v), v \in V(G)$ are distinct, is called an antimagic edge t -coloring. If graph G admits an antimagic edge $|E(G)|$ -coloring then G is called an antimagic graph.

All the terms and concepts not defined in this paper can be found in [8, 9].

In 1990, Hartsfield and Ringel conjectured the following:

Conjecture [4]. All simple connected graphs except for K_2 are antimagic.

Although the conjecture has undergone numerous researches, it is still an open problem for a wide range of graphs, including trees and bipartite graphs.

The authors have formulated the conjecture in the terminology of edge labelings (assignments of edges to numbers $1, 2, \dots, |E(G)|$). This paper offers to consider a more generalized problem taking into account that edge labeling is a particular case of edge coloring. Thus, we introduce a class of graphs \mathcal{AM} which contains graphs G for which there exists some integer t , such that G admits an antimagic edge t -coloring. Then, for any graph $G \in \mathcal{AM}$, we denote by $\omega_{am}(G)$ the least positive integer t , for which G admits an antimagic edge t -coloring.

In this paper, we consider the $\omega_{am}(G)$ parameter for simple cycles and regular bipartite graphs and obtain some results on its lower and upper bounds.

We will use the following lemma to prove our results on simple cycles and bipartite graphs.

Lemma [5]: Let G be a graph in \mathcal{AM} . Let for some d ($1 \leq d \leq \Delta(G)$), n_d is the number of vertices with degree d in G . Then, $\omega_{am}(G) \geq \left\lceil \frac{n_d-1}{d} \right\rceil + d$.

Simple cycles

Let C_n be a simple cycle of n vertices ($n \geq 3$). It is known that C_n is an antimagic graph and therefore belongs to $\mathcal{AM}([1, 2, 3, 4, 7])$.

Theorem 1: For any integer $n \geq 3$,

$$\omega_{am}(C_n) = \begin{cases} \frac{n+4}{2}, & \text{if } n = 2k, k \geq 2, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{n+5}{2}, & \text{if } n = 4k+1, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{n+3}{2}, & \text{if } n = 4k+3, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Proof: Choosing $d = 2$ in the lemma above, we obtain $\omega_{am}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2$. If n is even, then $\omega_{am}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2 = \frac{n}{2} + 2 = \frac{n+4}{2}$. If n is odd, $\omega_{am}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 2 = \frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+3}{2}$. Consider the case when $n = 4k + 1$, for some $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$. Let us show that it is impossible to construct an antimagic $\frac{n+3}{2}$ -coloring in this case. Suppose that such coloring exists, and let us consider the values of *Sum* function on the vertices of the graph. Since we only use the colors 1 through $\frac{n+3}{2}$, and each vertex has a degree of 2, the least possible value of *Sum* is 3, and the largest possible value is $\frac{n+3}{2} - 1 + \frac{n+3}{2} = n + 2$. Since there are n vertices which should have a unique *Sum* value, the set of *Sum* values is $\{Sum(v_i) \mid (i = 1, 2, \dots, n)\} = \{3, 4, 5, \dots, n + 2\}$. Let us notice that the following number

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Sum(v_i) &= 3 + 4 + \dots + (n + 2) = \frac{n+5}{2} \cdot n = \frac{4k+6}{2} \cdot (4k+1) \\ &= (2k+3)(4k+1) \end{aligned}$$

is odd. However, since the color of each edge should be counted twice in this sum, it should have been even, so we came to a contradiction. Therefore, $n = 4k + 1 \Rightarrow \omega_{am}(C_n) > \frac{n+3}{2} \geq \frac{n+5}{2}$. We denote by T_n the following number:

$$T_n = \begin{cases} \frac{n+4}{2}, & \text{if } n = 2k, k \geq 2, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{n+5}{2}, & \text{if } n = 4k+1, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{n+3}{2}, & \text{if } n = 4k+3, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Thus, we obtained that $\omega_{am}(C_n) \geq T_n$. Now, to prove the theorem, it is sufficient to construct a coloring, for which the equality holds for each $n \geq 3$.

Let us enumerate the vertices of C_n in such a way that $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid (i = 1, 2, \dots, n-1)\} \cup \{v_n v_1\}$. We say that the proper edge-coloring α of the graph C_n satisfies the condition (a) if there exist vertices $a, b, c, d \in V(C_n)$ such that $ab \in E(C_n), bc \in E(C_n), cd \in E(C_n), a \neq c, b \neq d, \alpha(ab) = T_n - 1, \alpha(bc) = T_n, \alpha(cd) = T_n - 2$. In this case, we call the quartet of vertices (a, b, c, d) an (a)-ensuring quartet (note that the order of vertices in it matters).

We construct an antimagic edge T_n -coloring of graph C_n satisfying the condition (a) for each $n \geq 3$ (we denote the coloring by α_n). Construction is made by induction in the following way:

1. We construct the colorings $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ separately.
2. Assuming that $n \geq 7$ and that we have already constructed the coloring α_{n-4} , we construct the coloring α_n .

1. The required colorings are provided via illustrations (figure 1).

2. Suppose $n \geq 7$ and we have constructed α_{n-4} for the graph C_{n-4} . Suppose that (a, b, c, d) is the (a)-ensuring quartet of α_{n-4} . First, we notice that $T_n = T_{n-4} + 2$. We define a new graph G in the following way:

$$V(G) = V(C_{n-4}) \cup \{v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\} \text{ and}$$

$$E(G) = (E(C_{n-4}) \setminus \{bc\}) \cup \{bv_{n-3}, v_{n-3}v_{n-2}, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_nv_{n-3}\}.$$

It is obvious that G is a simple cycle of n vertices, thus the constructing of an antimagic T_n -coloring satisfying the condition (a) will end the proof. Let us construct the coloring α_n in the following way (figure 2):

$$\alpha_n(bv_{n-3}) = T_{n-4} + 2, \alpha_n(v_{n-3}v_{n-2}) = T_{n-4} - 2, \alpha_n(v_{n-2}v_{n-1}) = T_{n-4},$$

$$\alpha_n(v_{n-1}v_n) = T_{n-4} + 2, \alpha_n(v_nv_{n-3}) = T_{n-4} + 1,$$

and $\alpha_n(e) = \alpha_{n-4}(e')$, for all the remaining edges e , where e' is the corresponding edge in the graph C_{n-4} .

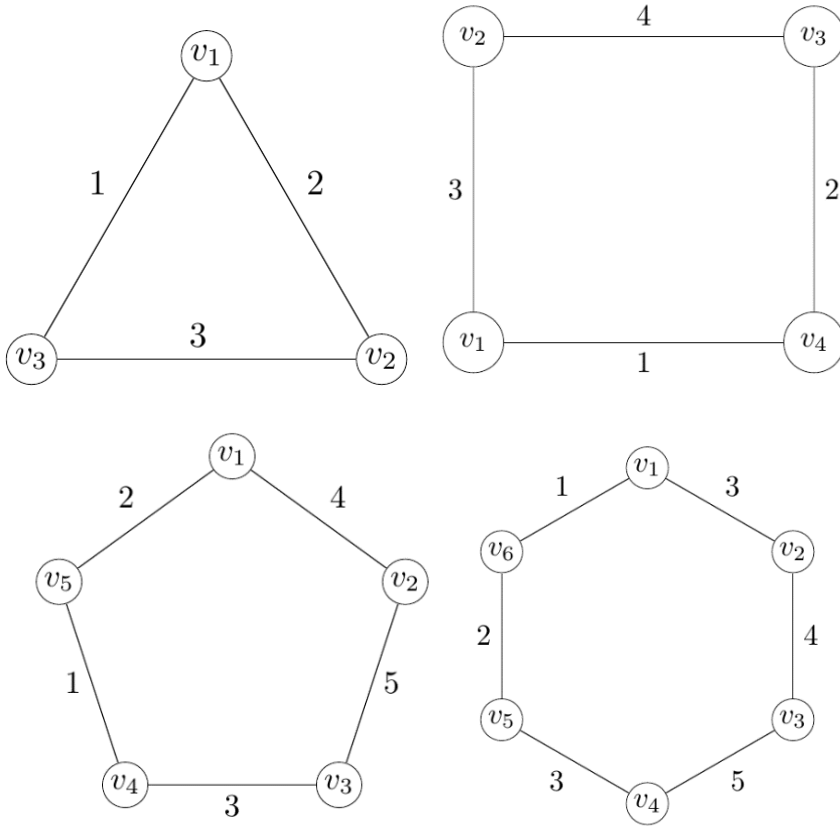


Figure 1.

It is easy to see that α_n is a proper edge T_n -coloring. Let us notice that $(c, v_n, v_{n-1}, v_{n-2})$ is an (a) -ensuring quartet of α_n which make the coloring satisfy the condition (a) . To ensure that the coloring is also antimagic, we can notice that $Sum_G(b, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4} + 1, Sum_G(v_{n-3}, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4}, Sum_G(v_{n-2}, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4} - 2, Sum_G(v_{n-1}, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4} + 2, Sum_G(v_n, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4} + 3, Sum_G(c, \alpha_n) = 2 \cdot T_{n-4} - 1,$ and for each of the remaining vertices v_i of G , $Sum_G(v_i, \alpha_n) = Sum_{C_{n-4}}(v_i, \alpha_{n-4}) < 2 \cdot T_{n-4} - 2$ since $Sum_{C_{n-4}}(b, \alpha_{n-4}) = 2 \cdot T_{n-4} - 1$ and $Sum_{C_{n-4}}(c, \alpha_{n-4}) = 2 \cdot T_{n-4} - 2.$

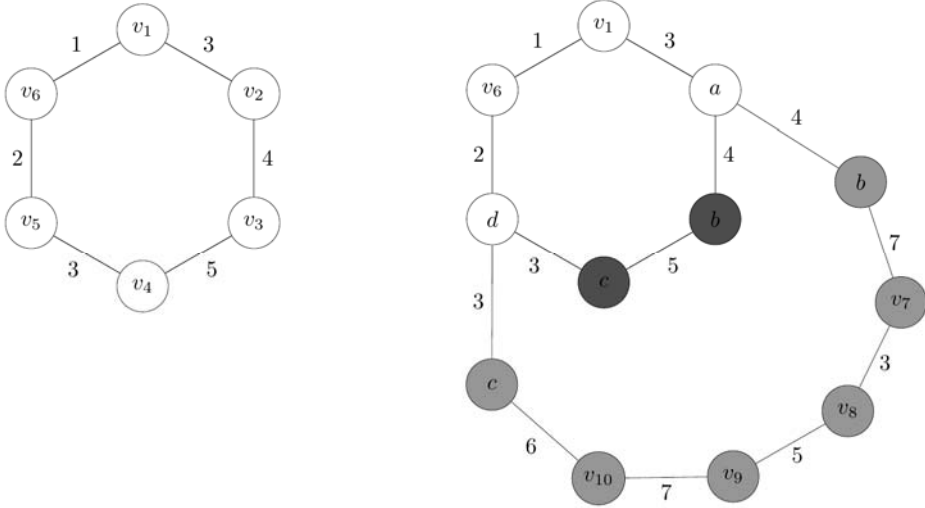


Figure 2.

Regular bipartite graphs

It is proved ([1, 2]) that regular graphs are antimagic, which means they lie in the set \mathcal{AM} . Here we give lower and upper bounds on $\omega_{am}(G)$ for regular bipartite graphs.

Theorem 2: Let G be an r -regular bipartite graph of $2n$ vertices ($n \geq 1, r \geq 2$). Then,

$$\left\lfloor \frac{2n - 1}{r} \right\rfloor + r \leq \omega_{am}(G) \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + r - 1.$$

Proof: The lower bound can be easily derived from the lemma by setting $d = r$. We will prove the upper bound by constructing an antimagic $(\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + r - 1)$ -coloring for each r -regular bipartite graph using an induction on r :

1. Firstly, let us construct a coloring for graphs where $r = 2$. In this case, the graph is a union of simple cycles, say $G = C_{m_1} \cup C_{m_2} \cup \dots \cup C_{m_k}$. Since each cycle in bipartite graph contains at least 4 vertices, we can notice that the number of components k is less than or equal to $\lfloor \frac{2n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. We

color those cycles using the coloring represented in theorem 1. Then we add $(T_{m_1} - 1)$ to all colors of edges in the second cycle (the cycle with m_2 vertices), $(T_{m_1} + T_{m_2} - 2)$ to all colors of edges in the third cycle (the cycle with m_3 edges), \dots , $(T_{m_1} + \dots + T_{m_{k-1}} - (k - 1))$ to all colors of edges in the last cycle (the cycle with m_k edges). Since within each cycle, the *Sum* values of vertices were distinct by the theorem 1, and since we added the same number to the color of each edge in the same cycle, we can surely say that within each cycle the *Sum* values are distinct in the described coloring. Moreover, the maximum of the *Sum* values of the vertices in the first cycle is $2T_{m_1} - 1$, while the minimum of the *Sum* values of the vertices in the second cycle is at least $2T_{m_1} + 1$. Likewise, the maximum *Sum* value of the vertices in the i -th cycle is always less than the minimum *Sum* value of the vertices in the $(i + 1)$ -th cycle, for $i \in [1, k - 1]$. We provided an antimagic coloring with the following number of colors:

$$\begin{aligned} (T_{m_1} + T_{m_2} + \dots + T_{m_k} - (k - 1)) &= \left(\frac{m_1+4}{2} + \frac{m_2+4}{2} + \dots + \frac{m_k+4}{2} - (k - 1) \right) = \\ &= \left(\frac{m_1+m_2+\dots+m_k}{2} + 2k - (k - 1) \right) = (n + k + 1). \\ k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &\Rightarrow n + k + 1 \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + r - 1. \end{aligned}$$

2. Supposing the upper bound is correct for any r -regular bipartite graph, let us prove that it is also correct for $(r + 1)$ -regular bipartite graph. Since each bipartite regular graph has a perfect matching (proved by König), we can pick one of them (let us call it M). We can notice that the graph $G' = G - M$ is an r -regular bipartite graph, for which we can apply the supposed condition of the induction and color it with an antimagic coloring with number of colors equal to $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + r - 1$. We color the graph G in the following manner: color all the edges of M with the color $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + r$, and all the remaining edges with the color of corresponding edge in G' . It is easy to see, that the provided coloring is an antimagic $\left(\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + r \right)$ -coloring.

Note, that if we want to construct a coloring using the proof of the theorem above, we can search for a 2-factor with the minimum number of simple cycles in it and firstly color that 2-factor, then add a color one by one to each perfect matching. So, from the proof of the theorem above, we can also imply the following corollary:

Corollary 1: Let G be an r -regular bipartite Hamiltonian graph of $2n$ vertices ($n \geq 1, r \geq 2$). Then,

$$\left\lceil \frac{2n-1}{r} \right\rceil + r \leq \omega_{am}(G) \leq n + r.$$

From the Corollary 3 of the paper of Moon and Moser ([6]) about bipartite graphs having Hamiltonian cycle, we can also imply the following corollary:

Corollary 2: Let G be an r -regular bipartite graph of $2n$ vertices where $\geq \frac{n}{2}$ ($n \geq 4, r \geq 2$). Then,

$$\left\lceil \frac{2n-1}{r} \right\rceil + r \leq \omega_{am}(G) \leq n + r.$$

REFERENCES

1. *Bérczi K., Bernáth A. and Vizer M.* Regular graphs are antimagic. The Electronic Journal of Combinatorics, 22, 2015.
2. *Chang F., Liang Y.-C., Pan Z. and Zhu X.* Antimagic labeling of regular graphs, J. Graph Theory, 82 (2016). PP. 339–349.
3. *Cheng Y.* Lattice grids and prisms are antimagic, Theoretical Computer Science 374 (2007) PP. 66–73.
4. *Hartsfield N. and Ringel G.* Pearls in Graph Theory, Academic Press, INC., Boston, 1990. PP. 108–109, Revised version, 1994.
5. *Mikaelyan H.* On antimagic edge colorings of certain graphs // «Вестник Российско-Армянского университета, сер.: физико-математические и естественные науки», № 2 (2022), 32–45.
6. *Moon J., Moser L.* On Hamiltonian bipartite graphs, Israel J. Math. 1 (3) (1963). PP. 163–165.
7. *Wang M.* Toroidal grids are anti-magic, Computing and combinatorics, Lecture Notes in Comput. Sci., 3595, Springer, Berlin (2005). PP. 671–679.
8. *West D.* Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 2001.

9. Պետրոսյան Պ.Ա., Մկրտչյան Վ.Վ., Քախաթյան Ռ.Ռ. Գրաֆների տեսություն, ուսումն. ձեռն., Եր. ԵՊՀ հրատ., 2015:

ОБ АНТИМАГИЧЕСКИХ РЕБЕРНЫХ РАСКРАСКАХ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ И РЕГУЛЯРНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

А. Манукян, Г. Микаелян

Ереванский Государственный университет

АННОТАЦИЯ

Для данного графа G и приведенной на нем правильной реберной t -раскраски α обозначим через $Sum_G(v, \alpha)$ сумму цветов ребер инцидентных вершине $v \in V(G)$. Тогда α называется «антимагической реберной t -раскраской графа G », если для каждой пары различных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$, $Sum_G(v_1, \alpha) \neq Sum_G(v_2, \alpha)$. Множество графов G , для которых существует некоторое целое число t – такое, что G допускает антимагическую реберную t -раскраску, обозначается через \mathcal{AM} . Для произвольного графа G из множества \mathcal{AM} обозначим через $\omega_{am}(G)$ наименьшее положительное целое число t , для которого G допускает антимагическую реберную t -раскраску. В данной работе найдены некоторые оценки и некоторые точные результаты параметра $\omega_{am}(G)$ для простых циклов и двудольных регулярных графов.

Ключевые слова: антимагическая реберная раскраска, реберная раскраска.

DOI 10.48200/1829-0450_pmn_2023_1_25
УДК 519 218.5

Поступила: 06.04.2023г.
Сдана на рецензию: 13.04.2023г.
Подписана к печати: 28.04.2023г.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ СЛУЧАЙНОЙ ХОРДЫ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

Э.Р. Арамян

Российско-Армянский (Славянский) университет

elen.aratyan@yahoo.com

АННОТАЦИЯ

Восстановление выпуклых фигур с помощью распределения длины случайной хорды по направлению выпуклой фигуры играет важную роль в интегральной геометрии и в теории восстановления выпуклых фигур. В этой работе найдено новое представление для распределения длины случайной хорды по направлению для выпуклых многоугольников. Полученное представление можно использовать для восстановления выпуклых фигур. А также был предложен алгоритм восстановления произвольного выпуклого четырехугольника.

Ключевые слова: выпуклое тело, распределение длины хорды, восстановление выпуклых многоугольников.

1. Введение

Геометрическая томография (см. [1], [2], [3]) – это область математики, занимающаяся поиском информации о геометрическом объекте, исходя из данных о его проекциях (тенях) на плоскостях или сечениях плоскостями, – для восстановления геометрических объектов.

Интегральные геометрические концепции – такие, как распределение длины хорды, распределение расстояния между двумя случайными точками по направлению в выпуклом теле D , распределение длины хорды по направлению и многие другие, – несут некоторую информацию о D . Известно, что распределения длины хорды по направлениям выпуклой фигуры D однозначно определяет D с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [3], [4], [5]). Восстановление выпуклых фигур с помощью случайных отрезков позволяет упростить расчет, поскольку методы математической статистики могут быть использованы для оценки геометрических характеристик случайных отрезков.

В данной статье нашли выражение для распределений длины случайной хорды по направлению для треугольника, выпуклого четырехугольника и новое выражение для распределения длины случайной хорды по направлению для выпуклых многоугольников. А также предложен алгоритм восстановления произвольного выпуклого четырехугольника по распределениям длины случайной хорды по направлениям.

2. Определения и методы

Пусть D – компактное множество в Евклидовом пространстве. Пусть $b(\varphi)$ – ортогональная проекция D на прямую, которая проходит через начало координат и имеет направление φ (Рис. 1). Прямая $g(p, \varphi)$, которая перпендикулярна направлению φ , пересекает D , имеет точку пересечения с $b(\varphi)$, и обозначим через $x \in b(\varphi)$. Мы можем сопоставить точки $x \in b(\varphi)$ и прямые, которые пересекают D и перпендикулярны направлению φ и обозначим эту прямую через $g_\varphi(x)$. Предполагая, что точки пересечения x имеют равномерное распределение на отрезке $b(\varphi)$, можем определить функцию распределения длины случайной хорды множества D по направлению φ :

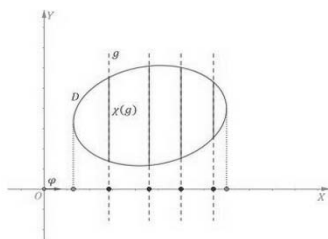


Рисунок 1.

Определение. Функция распределения длины хорды по направлению, это:

$$FD(t, \varphi) = P\{|\chi(g\varphi)| < t: \chi(g\varphi) = g\varphi \cap D\},$$

где $g\varphi$ имеет направление либо φ .

3. Случай треугольника

Рассмотрим произвольный треугольник ΔABC на плоскости. Вычислим функцию распределения длины хорды по направлению $\varphi \in S^1$.

Лемма. Функция распределения длины хорды треугольника ΔABC по направлению $\varphi \in S^1$

$$F_{\Delta ABC}(t, \varphi) = \begin{cases} \frac{t}{x_{max}} & \text{при } 0 < t < x_{max} \\ 1, & \text{при } t \geq x_{max} \\ 0, & \text{при } t \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

где x_{max} – это длина максимальной хорды треугольника по направлению φ .

Доказательство:

Рассмотрим ΔABC и направление $\varphi \in S^1$. Обозначим длину максимальной хорды по направлению φ как x_{max} . При $t \geq x_{max}$ $F_{\Delta ABC}(t, \varphi) = 1$.

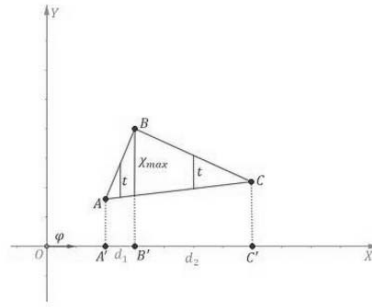


Рисунок 2.

Обозначим события $B \stackrel{\text{def}}{=} \{|\chi\varphi(g)| \leq t\}$, $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x(g\varphi) \in d_1\}$, $A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x(g\varphi) \in d_2\}$, где $x(g\varphi)$ – это точка пересечения с $b(\varphi)$. По формуле полной вероятности будем иметь:

$$F_{\Delta A}(t, \varphi) = P(|\chi\varphi(g)| < t) = P(A_1)PA_1(B) + P(A_2)PA_2(B) = \\ = \frac{d_1}{b-a} * \frac{t}{x_{max}} + \frac{d_2}{b-a} * \frac{t}{x_{max}} = \frac{t}{x_{max}}, \text{ при } 0 < t < \chi_{max}$$

4. Случай выпуклого четырехугольника

Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $K \stackrel{\text{def}}{=} ABCD$ на плоскости. Вычислим функцию распределения длины хорды по направлению $\varphi \in S^1$.

Лемма. Функция распределения длины хорды выпуклого четырехугольника $ABCD$ по направлению $\varphi \in S^1$ имеет следующий вид:

$$F_{ABCD}(t, \varphi) = \begin{cases} \frac{a}{a+b+c} * \frac{t}{x_1} + \frac{c}{a+b+c} * \frac{t}{x_2} + \frac{b}{a+b+c} * \frac{t-x_1}{x_1-x_2}, & \text{при } 0 < t < x_2 \\ 1, & \text{при } t \geq x_2 \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases} \quad (4.1),$$

где χ_1 и χ_2 – это длины максимальных хорд по направлению $\varphi \in S^1$, опущенных из вершин ($\chi_2 > \chi_1$), а $a = |AB_\varphi|$, $b = |BC_\varphi|$, $c = |CD_\varphi|$, то есть ортогональные проекции сторон на прямую с направлением φ (см. Рис. 3).

Доказательство.

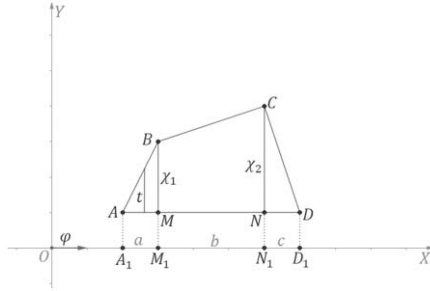


Рисунок 3.

Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ и произвольное направление $\varphi \in S^1$. Построим хорды из вершин B и C по направлению φ (с длинами, соответственно, χ_1, χ_2 , пусть $\chi_1 < \chi_2$), получая, соответственно, хорды BM и CN . Перпендикуляры, опущенные из вершин A, D и из точек M, N , выделяют на оси OX отрезки a, b, c . Посчитаем функцию распределения длины случайной хорды $\chi_\varphi(g)$ по направлению φ .

Пусть $t \geq \chi_2$. Тогда $F_{ABCD}(t, \varphi) = P(|\chi_\varphi(g)| < t) = 1$.

Пусть $0 < t < \chi_2$. Обозначим события: $B \stackrel{\text{def}}{=} \{|\chi_\varphi(g)| < t\}$,

$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x(g\varphi) \in a\}$, $A_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x(g\varphi) \in b\}$, $A_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x(g\varphi) \in c\}$.

По формуле полной вероятности будем иметь:

$$\begin{aligned} F_{AB}(t, \varphi) &= P(|\chi_\varphi(g)| < t) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) \\ &= \frac{a}{a+b+c} * \frac{t}{\chi_1} + \frac{b}{a+b+c} * P_{A_2}(b) + \frac{c}{a+b+c} * \frac{t}{\chi_2} \end{aligned}$$

Посчитаем $P_{A_2}(B)$ отдельно. Рассмотрим четырехугольник $MBCN$ отдельно. Из точки M проведем параллель MM' к отрезку BC . Тогда будем иметь, что $P_{A_2}(B) = \frac{t-x_1}{x_1-x_2}$.

Учитывая (21), получили, что при $0 < t < \chi_2$:

$$F_{ABCD}(t, \varphi) = \frac{a}{a+b+c} * \frac{t}{x_1} + \frac{b}{a+b+c} * \frac{t-x_1}{x_1-x_2} + \frac{c}{a+b+c} * \frac{t}{x_2}$$

5. Алгоритм восстановления выпуклого четырехугольника

Шаг 1. Пусть имеем длину максимальной хорды по направлению $\varphi \in S^1$. Обозначим эту длину χ_1 . Пусть также имеем длину максимальной хорды по направлению $\varphi_1 + \theta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi'$ где θ – принимает малое значение. Обозначим эту длину как χ'_1 . Берем произвольную точку A на плоскости и из этой точки построим отрезки длины χ_1 и χ'_1 по направлениям φ_1 и $\varphi_1 + \theta$, соответственно. Соединим концы этих отрезков C и M прямой g_1 .

Шаг 2. Возьмем другое направление φ_2 и проведем максимальные хорды по направлениям φ_2 и $\varphi_2 + \theta$ из точки B . Соединим концы этих отрезков D и N прямой g_2 .

Шаг 3. Делаем параллельный перенос прямой g_2 так, чтобы она проходила через точку C , и точка B находилась на прямой g_1 . Соединяя точку A с B и C с D , получим искомый выпуклый четырехугольник (Рис. 4).

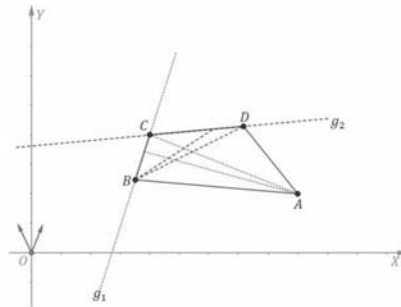


Рисунок 4.

6. Случай многоугольника

Сперва рассмотрим случай когда D – трапеция с основаниями, параллельными направлению $\varphi \in S^1$.

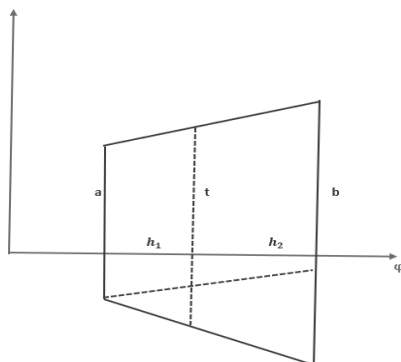


Рисунок 5.

Легко увидеть, что в этом случае $F_{D,\varphi}(t)$ имеет равномерное распределение на сегмент $[a; b]$, где a и b (скажем, $a < b$) – длин основания трапеции D . Действительно, при $a < t < b$ имеем (см. Рис. 5, можно вывести из подобия):

$$F_{D,\varphi}(t) = \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{t-a}{b-a} \quad (6.1)$$

Теперь, пусть D выпуклый многоугольник (n -угольник), не имеющий параллельных сторон, а $\varphi \in S^1$ – некоторое направление. Разделим выпуклый многоугольник D на трапеции D_i , прямыми, проходящими через вершину D , и параллельно направлению φ , как это показано на Рис. 6.

Используя формулу полной вероятности (6.1), имеем:

$$F_{D,\varphi}(t) = P(X < t) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i F_{D_i,\varphi}(t) \quad (6.2)$$

где $p_i = \frac{h_i}{b_D(\varphi^\perp)}$ – это вероятность, что брошенная равномерно точка на ширину попадет на отрезок, который соответствует высоте D_i , h_i – высота D_i , а $b_D(\varphi)$ – это ширина D . Заметим, что в общем случае мы разделим D на $n-1$ -части.

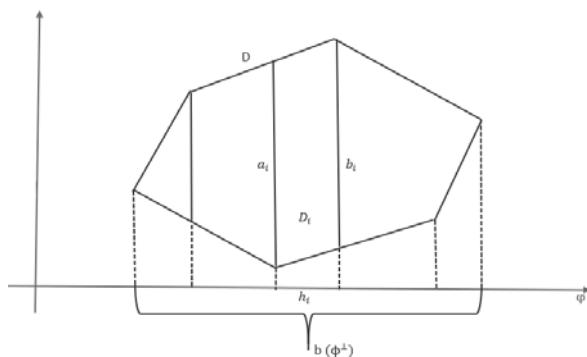


Рисунок 6.

Удобно рассматривать распределения длин случайной хорды по направлению выпуклого многоугольника D в терминах его функции плотности.

Дифференцируя (3.2), получим плотность распределения $F_{D,\varphi}(t)$.
Имеем

$$f_{D,\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{1}{b_i - a_i} I_{[a_i, b_i]}(t) \quad (6.3)$$

Пусть D выпуклый n – угольник, не имеющий параллельных сторон, а $\varphi \in S^1$ – некоторое направление. Формула (6.2) дает нам возможность делать следующие утверждения.

Утверждение 1. Легко видеть, что для всех направлений $\varphi \in S^1$ (кроме конечного числа $n-1$ направлений) функция плотности $f_{D,\varphi}(t)$ непрерывна и имеет разрыв в этих $n-1$ точках.

Заклучение

Таким образом в данной статье мы нашли выражения для распределений длин хорд по направлению для треугольника, выпуклого четырехугольника, и новое выражение для выпуклого n угольника. Используя эти выражения, предложили алгоритм для восстановления четырехугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ambartzumian R.* Combinatorial integral geometry, metric and zonoids. Acta Appl. Math. 1987, vol. 9, 3–27.
2. *Santalo L.* Integral Geometry and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
3. *Nagel W.* Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons. J. Appl. Probab. 30, 730–736, 1993.
4. *Averkov G., Bianchi G.* Confirmation of Matheron’s conjecture on the covariogram of aplanar convex body, J. Eur. Math. Soc., in press, arXiv:0711.0572 [math.MG].
5. *Bianchi G.* The covariogram determines three-dimensional convex polytopes. Advances in Mathematics 220 (2009), 1771–1808.

REPRESENTATIONS FOR THE DISTRIBUTION OF THE LENGTH OF THE RANDOM CHORD IN THE DIRECTION OF CONVEX FIGURES

E. Aramyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

Reconstruction of convex figures using the distributions of the length of the random chord in directions of a convex figure plays an important role in integral geometry and in the theory of reconstruction of convex figures. In this work, a new expression for the distribution of the length of the random chord in the direction of convex polygons is found. The representation can be used to reconstruct convex figures. Also, we’re proposing an algorithm for reconstructing an arbitrary convex quadrilateral.

Keywords: convex figures, length of the chord, reconstructing an arbitrary convex figure.

OI 10.48200/1829-0450_pmn_2023_2_34
УДК 519.688

Поступила: 09.02.2023г.
Сдана на рецензию: 14.02.2023г.
Подписана к печати: 28.03.2023г.

TEXT REALIGNMENT FOR SPEAKER DIARISATION

D. Karamyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

dkaramyan@krisp.ai

ABSTRACT

Speech applications dealing with conversations require not only recognizing the spoken words but also determining who spoke when. The task of assigning words to speakers is typically addressed by merging the outputs of two separate systems, namely, an automatic speech recognition (ASR) system and a speaker diarisation (SD) system. In practical settings, speaker diarisation systems can experience significant degradation in performance due to a variety of factors, including uniform segmentation with a high temporal resolution, inaccurate word timestamps, incorrect clustering and estimation of speaker numbers, as well as background noise and reverberation. Therefore, it is important to automatically detect these errors and make corrections if possible. In this study, we employ the Word Diarisation Error Rate (WDER) metric to pinpoint diarisation errors at the word level and classify them into three categories. Furthermore, we investigate two realignment strategies, namely an N-gram language model-based realignment and a punctuation-based realignment, to correct mistakes in words placed at the borders of sentences spoken by different speakers. Both methods resulted in an improvement in diarisation performance, with

punctuation-based realignment providing the most significant word diarisation error rate reduction.

Keywords: Speaker Diarisation, Error Correction, Text Realignment, Word Diarisation Error Rate.

Introduction

Speech and language technology has greatly improved in recent years, resulting in a significant shift in how people interact with machines. For example, with the widespread use of smart speakers, ASR systems are now widely used by millions of users. Despite the significant progress, machines still face challenges in understanding natural conversations involving multiple speakers such as in meetings, interviews, phone calls, videos, or medical recordings. A crucial step in comprehending natural conversations is identifying the spoken words and determining who spoke them. This is usually done in three steps: (1) transcribing the words with an ASR system, (2) predicting “who spoke when” using a speaker diarisation system, and (3) matching the output of those two systems.

More formally, speaker diarisation is the process of dividing an input audio stream into homogeneous segments according to the speaker’s identity. A typical speaker diarisation system usually consists of several steps: (1) Speech segmentation, where the input audio is segmented into short sections that are assumed to have a single speaker, and the non-speech sections are filtered out by Voice Activity Detection (VAD), (2) Speaker embedding extractor, where speaker embeddings are extracted from segmented sections, (3) Clustering, where the extracted audio embeddings are grouped [1] into clusters based on the number of speakers present in the audio recording, and optionally, (4) Resegmentation step is performed to further refine clustering results. While early work relied on handcrafted audio features for speaker embedding [2, 3], recent efforts have been successful in learning better representations with deep neural networks [4, 5, 6].

Nonetheless, speaker diarisation systems may exhibit subpar performance due to a multitude of challenges. Inaccuracies in these systems can have a detrimental impact on the user's overall assessment of the transcript quality. Some of these errors can be addressed through post-realignment techniques. In this work, we employ the WDER metric to automatically highlight words with incorrect speaker tags and categorize them. Then, we examine two realignment methods: LM and punctuation-based, to rectify inaccuracies for boundary words between sentences spoken by different speakers.

Classifying Diarisation Errors

A typical method for assessing traditional speaker diarisation systems is the Diarisation Error Rate (DER). This is calculated by adding together three types of errors: false alarms, missed detections, and speaker confusion errors. Essentially, DER compares the reference speaker labels with the predicted speaker segments in the time domain. On the other hand, the use of a joint ASR and SD system directly assign speakers to recognized words, eliminating the need to rely on time boundaries. Google researchers in the [7] work proposed a new metric, Word Diarisation Error Rate, to evaluate such joint ASR and SD systems, by measuring the percentage of words in the transcript that are correctly tagged with the right speaker:

$$\text{WDER} = \frac{S_{IS} + C_{IS}}{S + C}$$

where S_{IS} represents the number of ASR Substitutions with incorrect speaker tags, C_{IS} represents the number of correctly recognized ASR words with incorrect speaker tags, S is the total number of ASR substitutions, and C is the total number of correctly recognized ASR words. WDER doesn't take into account deletion and insertion errors as the speaker tags associated with them cannot be mapped to reference without ambiguity.

One benefit of WDER is that it can be used to automatically identify and visualize diarisation errors at the word level. By examining errors at the word level, it is possible to categorize them into three categories:

- a) Incorrect speaker tags within a paragraph.
- b) The first and last words of a paragraph having incorrect speaker tags.
- c) A complete paragraph being assigned to the wrong speaker.

The main cause of errors of type (a) and (b) is the use of uniform audio segmentation with a high temporal resolution. Inaccurate ASR word timestamps can also lead to type (b) errors. Type (c) errors typically occur due to inaccurate estimation of the number of speakers and incorrect clustering. Background noise, music and reverberation also contribute to all types of errors. Examples of each type of error are illustrated in Table 1.

Table 1.

Examples of different errors (errors are marked in yellow color).

Error Type	Example
Type (a)	Speaker A: right that's going exactly going back to facebook's optimizer algorithm that's not optimizing for truth right it's optimizing for profit and they they claim to be neutral but of course nothing's neutral right and we have seen the results we've seen what it's actually optimized for and it's not pretty
Type (b)	Speaker A: and presumably you could take all that biased input data and say this high chance recidivism means that we should rehabilitate more i mean like you could take all that same stuff and choose to do a completely different thing with the result of

	<p>Speaker B: the algorithm total that's exactly my point exactly my point you know we could say oh i wonder why people who have this characteristic have so much worse recidivism well let's try to help them find a job maybe that'll help we could use those algorithms those risk scores to try to account for our society</p>
Type (c)	<p>Speaker A: is this a good or bad thing that social media has been able to infiltrate politics</p>

Improving Performance with Text Realignment

Errors in the first and last words of a paragraph can be partially corrected using a language or punctuation restoration model.

LM Realignment. Language model realignment is a process of reassigning the speaker labels in a given transcription of spoken language by utilizing a language model. The process involves inserting special start and end tokens, before and after each boundary word that separates two hypothetical sentences spoken by different speakers. These two hypotheses are then scored based on the joint probabilities of words using a language model. The hypothesis with a higher score is chosen, and the boundary word is assigned to the speaker associated with that hypothesis.

Formally, given a transcription T consisting of a sequence of words W_1, W_2, \dots, W_n and the speaker labels S_1, S_2, \dots, S_n , LM realignment aims to obtain a new sequence of speaker labels $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \dots, \widehat{S}_n$, that is more accurate and aligned with the spoken language. The process involves defining a set of possible boundary words B , and for each boundary word $b \in B$, creating two hypothetical sentences by inserting $\langle |s \rangle$ $\langle s \rangle$ tokens before and after b . The two hypotheses are then scored using a language model to obtain the joint probabilities $P(T/H_1)$ and $P(T/H_2)$, where H_1 and H_2 denote the two hypotheses. The boundary word b is then assigned to the speaker associated

with the hypothesis that has the higher score. This process is repeated for all boundary words. For instance, for the boundary word “but”, we generate two hypotheses:

- *Hypothesis 1*: since i think like tuesday <|s> <s> **but** he's coming back
- *Hypothesis 2*: since i think like tuesday **but** <|s> <s> he's coming back

The joint probabilities of words in the sentence are computed for these two hypotheses using a language model. In this example, *Hypothesis 1* is likely to receive a higher score, and as a result, the word “but” will be assigned to the second speaker.

Punctuation-based Realignment: Another simple method is to use punctuation markings. If a sentence is split between two different speakers, it can either be part of Speaker A's utterance or Speaker B's utterance. We can simply take the mode of speaker labels for each word in the sentence and use that speaker label for the whole sentence. We apply punctuation-based realignment whenever a dominant speaker is present within the sentence, to prevent conflicts that may occur when a sentence is evenly divided between two speakers.

Experiments

Our ASR system is constructed using the Conformer-CTC architecture [8] and we use a pre-trained Conformer-Medium checkpoint¹ that was made available by Nvidia. Using the word timestamps generated by ASR, we aim to identify voice activity segments. The obtained segments are further divided into smaller sub-segments with a window size of 1.5 seconds and a step size of 0.5 seconds. Next, for each speech sub-segment we extract speaker embedding with SpeakerNet [9] model by employing a

¹ https://catalog.ngc.nvidia.com/orgs/nvidia/teams/nemo/models/stt_en_conformer_ctc_medium

pre-trained Speakernet-M checkpoint² also released by Nvidia. These embeddings are grouped into clusters using spectral clustering [10] algorithm. The number of speakers is automatically determined through the maximal eigen-gap approach [1]. Once we have speaker labels obtained by speaker diarisation, we align the decoded words with the speaker labels to produce a final transcript.

In order to realign with LM, we employ 4-gram language model available in Kaldi³. For punctuation-based realignment, a BERT-based [11] punctuation restoration model⁴ is employed to predict punctuation marks, including commas, periods, and question marks. These marks are then used to split the text into sentences.

Results

To evaluate the performance of realignment methods, we collect 16 audios with a total duration of 9 hours. These recordings feature conversational content and involve multiple speakers, with 2 to 7 speakers per recording. Also, we conducted testing on the recently created TAL dataset [12]. Specifically, we utilized the testing subset of this dataset, which comprises of 36 one-hour long podcast recordings featuring multiple speakers. We report performance using WDER as it provides a more accurate representation of the performance of a combined ASR and SD system at the word level, compared to the traditional diarisation error rate in the time domain.

As displayed in Table 2 and Table 3, both LM and punctuation-based realignments lead to an improvement in the accuracy of diarisation. Specifically, it has been observed that punctuation-based realignment is particularly effective in correcting errors found at the beginning and end of paragraphs.

² https://catalog.ngc.nvidia.com/orgs/nvidia/teams/nemo/models/speakerdiarization_speakernet

³ https://kaldi-asr.org/models/5/4gram_small.arpa.gz

⁴ https://catalog.ngc.nvidia.com/orgs/nvidia/teams/nemo/models/punctuation_en_bert

Table 2.

Comparison of different realignment methods on custom dataset.

	WDER
Without Realignment	857/91571 (0.936%)
LM Realignment	832/91571 (0.909%)
Punctuation Realignment	790/91571 (0.862%)
Punctuation+LM Realignment	789/91571 (0.862%)

Table 3.

Comparison of different realignment methods on TAL dataset.

	WDER
Without Realignment	16397/341486 (4.802%)
LM Realignment	16155/341486 (4.731%)
Punctuation Realignment	15976/341486 (4.678%)
Punctuation+LM Realignment	15969/341486 (4.676%)

Conclusions

In this study, we analyzed the errors of a joint speech recognition and speaker diarisation system at the word level. By using the WDER metric, we were able to automatically identify words with incorrect speaker tags and categorize the errors into three groups. We also examined two realignment methods: LM and punctuation-based, to correct errors for boundary words between sentences spoken by different speakers. Both methods resulted in an improvement in diarisation performance, with punctuation-based realignment providing the most significant word diarisation error rate reduction.

Punctuation restoration based solely on text is not always possible. Therefore, in future work, we will investigate the use of an audio-lexical based punctuation restoration model for realignment.

Acknowledgements: This research was supported by Krisp.ai.

REFERENCES

1. Wang Q., Downey C., Wan L., Mansfield P.A. & Moreno I.L. (2018). Speaker diarization with LSTM. 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). PP. 5239–5243.
2. Ajmera J., & Wooters C. (2003). A robust speaker clustering algorithm. 2003 Ieee Workshop on Automatic Speech Recognition and Understanding (Ieee Cat. No. 03ex721). PP. 411–416.
3. Barras C., Zhu X., Meignier S., & Gauvain J.-L. (2006). Multistage speaker diarization of broadcast news. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 14(5). PP. 1505–1512.
4. Sell G. & Garcia-Romero, D. (2014). Speaker diarization with PLDA i-vector scoring and unsupervised calibration. 2014 IEEE Spoken Language Technology Workshop (SLT). PP. 413–417.
5. Variani E., Lei X., McDermott E., Moreno I.L., & Gonzalez-Dominguez J. (2014). Deep neural networks for small footprint text-dependent speaker verification. 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). PP. 4052–4056.
6. Snyder D., Garcia-Romero D., Sell G., Povey D., & Khudanpur, S. (2018). X-vectors: Robust dnn embeddings for speaker recognition. 2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). PP. 5329–5333.
7. Shafey L.E., Soltan H., & Shafran I. (2019). Joint speech recognition and speaker diarization via sequence transduction. ArXiv Preprint ArXiv:1907.05337.
8. Gulati A., Qin J., Chiu C.-C., Parmar N., Zhang Y., Yu J., Han W., Wang S., Zhang Z., Wu Y. & others. (2020). Conformer: Convolution-augmented transformer for speech recognition. ArXiv Preprint ArXiv:2005.08100.
9. Koluguri N.R., Li J., Lavrukhin V. & Ginsburg B. (2020). SpeakerNet: 1D depth-wise separable convolutional network for text-independent speaker recognition and verification. ArXiv Preprint ArXiv:2010.12653.

10. Von Luxburg U. (2007). A tutorial on spectral clustering. *Statistics and Computing*, 17(4). PP. 395–416.
11. Devlin J., Chang M.-W., Lee K., & Toutanova K. (2018). Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. ArXiv Preprint ArXiv:1810.04805.
12. Mao H.H., Li S., McAuley J. & Cottrell, G. (2020). Speech recognition and multi-speaker diarization of long conversations. ArXiv Preprint ArXiv:2005.08072.

ВЫРАВНИВАНИЕ ТЕКСТА В ДИАРИЗАЦИИ ДИКТОРОВ

Д.С. Карамян

Российско-Армянский (Славянский) университет

АННОТАЦИЯ

Речевые приложения, имеющие дело с разговорами, требуют не только распознавания произнесенных слов, но и определения того, кто когда говорил. Задача присвоения слов дикторам обычно решается путем объединения двух отдельных систем, а именно: системы автоматического распознавания речи (ASR) и системы диаризации дикторов (SD). В практических условиях производительность систем диаризации дикторов может значительно ухудшиться из-за множества факторов, включая равномерную сегментацию с высоким временным разрешением, неточные временные метки слов, неправильную кластеризацию и оценку количества дикторов, а также фоновый шум и реверберацию. Поэтому важно автоматически обнаруживать эти ошибки и, по возможности, исправлять их. В этом исследовании мы используем показатель частоты ошибок диаризации слов (WDER), чтобы точно определить ошибки диаризации на уровне слов и классифицировать их по трем категориям. Кроме того, мы исследуем две стратегии выравнивания, а именно: выравнивание на основе языковой модели N-грамм и выравнивание на основе знаков препинания, чтобы исправить ошибки в словах, расположенных на границах предложений, произносимых разными дикторами. Оба метода привели к улучшению производительности диаризации, при этом выравнивание на основе знаков препинания обеспечило наиболее значительное снижение частоты ошибок диаризации слов.

Ключевые слова: диаризация дикторов, исправление ошибок, выравнивание текста, частота ошибок диаризации слов.

DOI 10.48200/1829-0450_pmn_2023_1_44
УДК 517.988.63

Поступила: 28.04.2022г.
Сдана на рецензию: 03.05.2023г.
Подписана к печати: 10.04.2023г.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ТЕПЛИЦА

А.К. Кроян

Армянский Национальный Аграрный университет

arpi.kroyan@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Данная статья посвящена изучению и решению одного класса нелинейных бесконечных систем алгебраических уравнений с монотонной нелинейностью и двумерными матрицами типа Теплица. При конкретных представлениях нелинейностей, указанная система возникает в дискретных задачах математической физики и математической биологии. Сочетанием специальных итерационных методов с методами построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора доказано существование нетривиального положительного решения указанной системы в пространстве \tilde{l}_1 .

Ключевые слова: система нелинейных уравнений, монотонность, нелинейность, матрица типа Теплица.

§1. Введение

Рассматривается система нелинейных бесконечных алгебраических уравнений:

$$x_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i} n-j h_{ij}(x_{ij}), m, n \in \mathbb{N}_0: \equiv \{0, 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

относительно матрицы $X = (x_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0} \in \tilde{l}_1$, где

$$\tilde{l}_1: = \left\{ X = (x_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0} : \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |x_{ij}| < +\infty \right\}.$$

Предполагается, что в системе (1) $A = (a_{ks})_{k,s \in \mathbb{Z}}$ – двумерная матрица Тейлора, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a_{ks} > 0, k, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a_{00} = 0, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{ks} = 1, \quad (2)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} |k| |s| a_{ks} < +\infty. \quad (3)$$

Обозначим

$$\chi(p) := \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} p^{i+j}, 0 \leq p \leq 1. \quad (4)$$

Заметим, что в силу условия (2) из (4) имеем

$$\chi(0) = 0, \chi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \equiv: \alpha, 0 < \alpha < 1, \chi \in C[0, 1]. \quad (5)$$

и $\chi(p) \uparrow$ по p на $[0, 1]$. Согласно теореме Больцано-Коши, для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ уравнение

$$\chi(p_\varepsilon) = \alpha\varepsilon. \quad (6)$$

имеет единственное решение $p_\varepsilon \in (0, 1)$.

Через $\{\beta_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ обозначим матрицу, для которой

$$\beta_{ij} \geq \frac{p_\varepsilon^{i+j}}{\alpha\varepsilon}, i, j \in \mathbb{N}_0, \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{ij} < +\infty, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i j \beta_{ij} < +\infty. \quad (8)$$

Пусть матрицы-функции $\{h_{ij}(u)\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$h_{ij} \in C(\mathbb{R}^+), \mathbb{R}^+ := [0, +\infty) \quad h_{ij} \uparrow \text{ по } u \text{ на } \mathbb{R}^+, i, j \in \mathbb{N}_0, \quad (9)$$

$$h_{ij}(p_\varepsilon^{i+j}) \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} p_\varepsilon^{i+j} u h_{ij}(u) \leq u + \beta_{ij}, u \in \mathbb{R}^+, i, j \in \mathbb{N}_0. \quad (10)$$

Частные случаи исследуемых систем имеют непосредственные применения в теории переноса излучения, в кинетической теории газов и в математической биологии (см. [1]–[3]).

Задача в одномерном случае при различных представлениях нелинейностей была рассмотрена в работах (см. [4]–[7]).

В настоящей работе исследован вопрос существования нетривиального положительного решения системы (1) в пространстве \tilde{l}_1 , а также изучено асимптотическое поведение построенного решения при $n \rightarrow +\infty$. При этом существенно были использованы результаты работы [8], посвященные вопросам разрешимости линейных дискретных неоднородных уравнений Винера-Хопфа.

§2. Вспомогательные факты

Наряду с системой (1), рассмотрим вспомогательную бесконечную систему неоднородных уравнений:

$$\tilde{Y}_{mn} = \tilde{\tau}_{mn} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i n-j} \tilde{Y}_{ij}, m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (11)$$

где

$$\tilde{\tau}_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i n-j} \beta_{ij}, m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (12)$$

Справедлива

Лемма 1. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ имеет место следующее неравенство:

$$\tilde{\tau}_{mn} \geq p_\varepsilon^{m+n},$$

где число p_ε определяется из (6).

Доказательство. Действительно, из (12), с учетом (7), (2), (4) и (6), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{mn} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i n-j} \beta_{ij} \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i n-j} p_\varepsilon^{i+j} = \\ &= \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{t=-\infty}^m \sum_{k=-\infty}^n a_{tk} p_\varepsilon^{m-t} p_\varepsilon^{n-k} \geq \frac{p_\varepsilon^{m+n}}{\alpha\varepsilon} \sum_{t=-\infty}^0 \sum_{k=-\infty}^0 a_{tk} p_\varepsilon^{-t} p_\varepsilon^{-k} = \\ &= \frac{p_\varepsilon^{m+n}}{\alpha\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} p_\varepsilon^{i+j} = \frac{p_\varepsilon^{m+n}}{\alpha\varepsilon} \chi(p_\varepsilon) = p_\varepsilon^{m+n}, m, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Теперь докажем ключевую лемму, которая будет использована при доказательстве основной теоремы.

Лемма 2. При условиях (2) и (7) система (11) имеет положительное ограниченное решение $\{\tilde{Y}_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}_0}$, для которого

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn} < +\infty. \quad (13)$$

Доказательство. Для системы (11) рассмотрим следующие итерации:

$$\tilde{y}_{mn}^{(q+1)} = \tilde{\tau}_{mn} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} \tilde{y}_{ij}^{(q)}, \quad (14)$$

$$\tilde{y}_{mn}^{(0)} = \tilde{\tau}_{mn}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (15)$$

Индукцией по q докажем, что для всякого $m \in \mathbb{N}_0$ имеет место следующая оценка сверху:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn}^{(q)} \leq y_m < +\infty, \quad (16)$$

где последовательность $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ является решением следующего неоднородного дискретного уравнения Винера-Хопфа (см. [8]):

$$y_m = \tau_m + \sum_{j=0}^{\infty} b_{m-j} y_j, \quad (17)$$

$$\tau_m := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_{mn}, \quad b_m := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Действительно, для $q = 0$ оценка справедлива, согласно определению нулевого приближения (15), и ввиду (17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\tau}_{mn} = \tau_m \leq y_m, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (18)$$

Предположим, что оценка (16) имеет место при некотором $q \in \mathbb{N}$. Тогда из (14), с учетом индукционного предположения и (17), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn}^{(q+1)} &= \tau_m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i-n-j} \tilde{y}_{ij}^{(q)} = \tau_m + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{y}_{ij}^{(q)} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m-i-n-j} \leq \\ &\leq \tau_m + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{y}_{ij}^{(q)} \sum_{n'=0}^{\infty} a_{m-i-n'} \leq \tau_m + \sum_{i=0}^{\infty} b_{m-i} y_i = y_m, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Индукцией по q также несложно доказать монотонность итераций:

$$\tilde{y}_{mn}^{(q)} \uparrow \text{ по } q, q = 0, 1, 2, \dots, m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (19)$$

Итак, из (16) и (19) следует, что при $q \rightarrow +\infty$ последовательность имеет предел

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \tilde{y}_{mn}^{(q)} = \tilde{y}_{mn}, m, n \in \mathbb{N}_0,$$

причем элементы предельной матрицы $(\tilde{y}_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяют системе (11), и для них имеет место оценка:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn} \leq y_m, m \in \mathbb{N}_0. \quad (20)$$

Так как $\sum_{m=0}^{\infty} y_m < +\infty$ (см. [8]), то из (20), с учетом неотрицательности $\tilde{y}_{mn}, m, n \in \mathbb{N}_0$, следует

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_{mn} < +\infty.$$

Лемма 2 доказана.

§ 3. Разрешимость системы (1)

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основного результата.

Теорема. При условиях (2), (9) и (10) нелинейная бесконечная система (1) имеет нетривиальное положительное решение в пространстве \tilde{l}_1 .

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для системы (1):

$$x_{mn}^{(l+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} h_{ij}(x_{ij}^{(l)}), \quad (21)$$

$$x_{mn}^{(0)} = p_{\varepsilon}^{m+n}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (22)$$

где p_{ε} при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$ однозначно определяется по формуле (6). По индукции докажем, что

$$x_{mn}^{(l)} \uparrow \text{ по } l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (23)$$

Используя лемму 1 и учитывая (6), (10), (21), (22), получим:

$$\begin{aligned} x_{mn}^{(1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} h_{ij}(p_{\varepsilon}^{i+j}) \geq \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} p_{\varepsilon}^{i+j} \geq p_{\varepsilon}^{m+n} \\ &= x_{mn}^{(0)}. \end{aligned}$$

Предполагая, что $x_{mn}^{(l)} \geq x_{mn}^{(l-1)}$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$) при некотором $l \in \mathbb{N}$ и имея в виду монотонность последовательности $\{h_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ по u , из (21) получим:

$$x_{mn}^{(l+1)} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} h_{ij}(x_{ij}^{(l-1)}) = x_{mn}^{(l)}, \quad m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Теперь индукцией по l для $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ докажем, что

$$x_{mn}^{(l)} \leq \tilde{y}_{mn}, l = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где $\{\tilde{y}_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ – решение вспомогательной системы (11) (см. лемму 2). При $l = 0$, согласно (22), лемме 1 и (11), получим:

$$x_{mn}^{(0)} = p_\varepsilon^{m+n} \leq \tilde{\tau}_{mn} \leq \tilde{y}_{mn}, m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Предполагая, что $x_{mn}^{(l)} \leq \tilde{y}_{mn}$ ($m, n \in \mathbb{N}_0$) при некотором $l \in \mathbb{N}$ и, при этом, учитывая условия (2), а также формулу (10), из (21) имеем

$$x_{mn}^{(l+1)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} (x_{ij}^{(l)} + \beta_{ij}) \leq \tilde{\tau}_{mn} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-i, n-j} \tilde{y}_{ij} = \tilde{y}_{mn}.$$

Из (23) и (24) следует сходимость последовательности матриц $\{X^{(l)}\}_{l=0}^{\infty}$, $X^{(l)} = (x_{mn}^{(l)})_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ к решению системы (1). Принимая во внимание (23) и (24), получаем также, что элементы предельной матрицы $X = (x_{mn})_{m,n \in \mathbb{N}_0}$ удовлетворяют двойному неравенству:

$$p_\varepsilon^{m+n} \leq x_{mn} \leq \tilde{y}_{mn}, m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (25)$$

Из (20) и (25) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} \leq y_m, m \in \mathbb{N}_0. \quad (26)$$

Так как $\sum_{m=0}^{\infty} y_m < +\infty$ (см. [8]), то $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} < +\infty$.

Теорема доказана.

Примеры

Приведем примеры матриц-функций $\{h_{ij}(u)\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ и соответствующих бесконечных матриц $\{\beta_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}_0}$, удовлетворяющих всем условиям доказанной теоремы:

$$\text{I) } h_{ij}(u) = \frac{1}{\alpha\varepsilon} \sqrt{up_\varepsilon^{i+j}}, u \geq 0, u \geq p_\varepsilon^{i+j}, i, j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\beta_{ij} \equiv \max\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{2\alpha^2\varepsilon^2}\right) \cdot p_\varepsilon^{i+j}, i, j \in \mathbb{N}_0.$$

$$\text{II) } h_{ij}(u) = \frac{2p_\varepsilon^{i+j}u}{\alpha\varepsilon(u+p_\varepsilon^{i+j})}, u \geq 0, u \geq p_\varepsilon^{i+j}, i, j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\beta_{i,j} = \frac{2}{\alpha\varepsilon} \cdot p_\varepsilon^{i+j}, i, j \in \mathbb{N}_0.$$

Автор выражает благодарность д.ф.м. н., проф. Х.А. Хачатрян за постановку задачи и к.ф.м. наук, доц. С.М. Андриян за полезные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика*. Т. 2. № 4, 1966. СС. 31–36.
2. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа // *Мат. моделирование*. Т. 16. №1, 2004. СС. 67–74.
3. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*. 1978. Vol. 6, № 2. PP. 109–130.
4. *Хачатрян Э.А.* Об одной бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений в критическом случае // *Мат. в высшей школе*. Т. 4. № 4, 2008. СС. 53–57.
5. *Хачатрян Х.А., Броян М.Ф.* Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса нелинейных бесконечных алгебраических систем с матрицами типа Тейлица-Генкеля // *Известия НАН Армении, Математика*. Т. 48. №5, 2013. СС. 63–78.

6. Хачатрян Х.А., Кроян А.К. О положительной разрешимости в l_1 одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений с матрицами типа Топлица // Вестник Российско-Армянского университета, сер.: физ.-мат. и естественные науки, № 5, 2015. СС. 16–25.
7. Аветисян М.О., Хачатрян Х.А. О качественных свойствах решения для одной систем нелинейных бесконечных алгебраических уравнений // Владикавк. мат. журнал, Т. 24, № 4, 2022. СС. 5–18.
8. Арабаджян Л.Г. О дискретных уравнениях Винера-Хопфа в консервативном случае // Мат. анализ и его приложения (Арм. пед. институт). №1, 1980. СС. 26–36.

**ON THE SOLVABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL
NONLINEAR INFINITE ALGEBRAIC SYSTEM
OF THE TOEPLITZ-TYPE**

A. Kroyan

Armenian National Agrarian University

ABSTRACT

The paper is devoted to the study and solution of one class of nonlinear infinite systems of algebraic equations with monotone nonlinearity and two-dimensional Toeplitz-type matrices. With specific representations of nonlinearities, the indicated system arises in discrete problems of mathematical physics and mathematical biology. By combining special iterative methods with methods for constructing invariant cone segments for the corresponding nonlinear operator, we prove the existence of a nontrivial positive solution of this system in the space \tilde{l}_1 .

Keywords: system of nonlinear equations, monotonicity, nonlinearity, Toeplitz-type matrix.

DESIGN AND ANALYSIS OF A NOVEL TRIPTERON-INSPIRED MICROMANIPULATOR WITH FLEXURE HINGES

H. Galoyan

Department of Mechanical Engineering and Machine Science (Armenia)

hrayr.galoyan@gmail.com

ABSTRACT

This paper proposes a novel design of a Tripteron-inspired micromanipulator with flexure hinges to address the issue of accuracy, which can arise when traditional joints are replaced with flexure hinges. The classic Tripteron manipulator with flexure hinges has been shown to have accuracy issues, particularly with the replacement of traditional joints, which can cause inaccuracies of end effector motion. The end effector of traditional Tripteron manipulator with flexure hinges is making rotational motions instead of clear translational motions. This is because of stiffness of flexure hinges. To minimize the effects of rotational motion and improve the accuracy, the novel design adds additional legs symmetrically for each leg, resulting in six legs and providing clear translational motions. The proposed design significantly improves the issue of unwanted rotational motion of the end effector. To validate the effectiveness of the new design, finite element analysis was performed using ANSYS. The analysis showed that the stress and deformation levels were well within acceptable limits for the material used, and the simulations demonstrated the new design's ability to achieve precise and accurate manipulation tasks.

Keywords: Tripteron, micromanipulator, finite element method, flexure hinge, flexure pivot.

1. Introduction

Micromanipulation technology is becoming increasingly important in various fields such as microelectronics, microbiology and biomedicine [1]. Precise and accurate manipulation of small objects is critical for these applications, and manipulators with high accuracy and precision are required. The Tripteron manipulator [2] is a popular choice for micromanipulation due to its high degree of freedom, dexterity, and accuracy.

The Tripteron (Fig. 1) [3] is a translational parallel mechanism (PM) comprised of three kinematically identical legs, each one having a lower link, an upper link, a linearly actuated prismatic joint fixed at an orthogonal coordinate frame, and three revolute joints whose axes are parallel to each other. Then the three ending revolute joints are connected to an end-effector, but their axes are orthogonal to each other [4].

The traditional design of the Tripteron manipulator, which includes traditional joints, can be problematic for the abovementioned application fields, when accuracy is of utmost importance. Therefore, flexure hinges have been chosen to replace traditional joints in Tripteron manipulators due to several advantages they offer. Firstly, flexure hinges have monolithic structure that can bend and flex under load, providing a frictionless and wear-free joint. This eliminates the need for lubrication and reduces the risk of wear and tear, which can lead to decreased accuracy over time and higher maintenance costs. Secondly, flexure hinges can provide highly accurate and precise movements due to their stiffness and lack of backlash. Overall, the use of flexure hinges can lead to improved performance and reduced maintenance costs compared to traditional joints, making them an attractive option for many engineering applications.

While micromanipulators with flexure hinges offer several advantages over traditional joint-based designs, they are not without their own limitations. One common issue with available designs of micromanipulators with flexure hinges [3, 5] is the possible inaccuracies of end effector motion (Fig. 2).

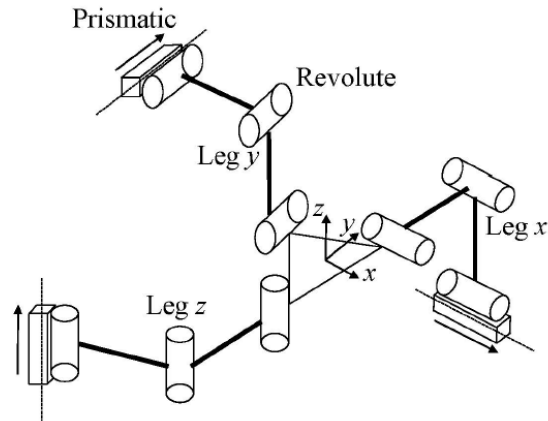


Figure 1. The kinematic diagram of Tripteron mechanism.

When traditional joints are replaced with flexure hinges in a Tripteron manipulator, the end effector tends to make rotational motions instead of clear translational motions. This behavior is due to the stiffness of the flexure hinges, which can prevent the end effector from moving in the desired direction. As a result, a micromanipulator with flexure hinges may not be able to achieve the level of accuracy needed for some precision manipulation tasks, and this can limit its usefulness in certain applications.

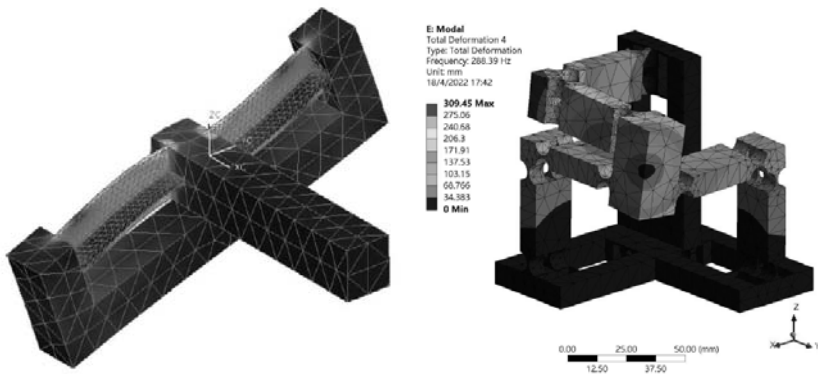


Figure 2. Inaccuracies of available designs of micromanipulators with flexure hinges.

2. Design of micromanipulators

The design and selection of components for a Tripteron manipulator are decisive for its successful operation. As in traditional Tripteron manipulator the legs have 1 DOF revolute joints, flexure hinges are also used with 1 DOF.

Two designs of flexure hinges, flexure hinge with circular contour (Fig. 3, b) [6] and, the “Butterfly” flexure hinge (Fig. 3, a) [7, 8] which have beneficial properties, such as increased deflection angle and stiffness, were selected for future study. In addition, two materials, titanium alloy and thermoplastic polyurethane (TPU), were considered for their potential use in the manipulator.

Carbon fiber was chosen for the connecting parts and the end effector due to its strength and lightness. The mechanical properties of the aforementioned materials are presented in figures 4–6.

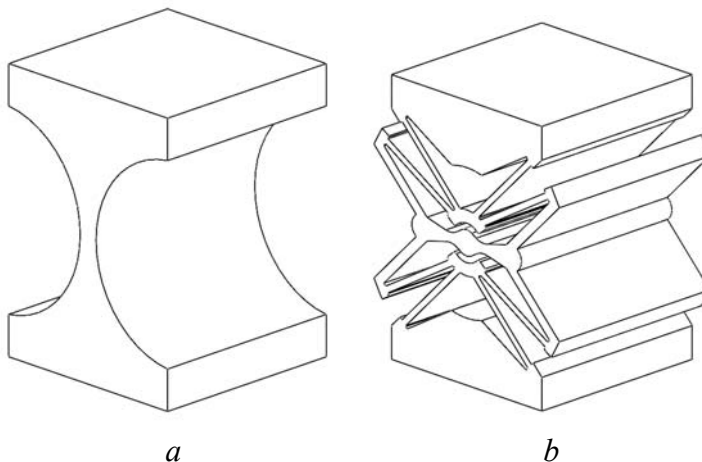


Figure 3. Flexure hinges.

a) Flexure hinge with circular contour; b) “Butterfly” flexure hinge.

Properties of Outline Row 4: Titanium Alloy		
A	B	C
Property	Value	Unit
Density	4620	kg m ⁻³
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion		
Isotropic Elasticity		
Derive from	Young's Modulus and Poisson's...	
Young's Modulus	9.6E+10	Pa
Poisson's Ratio	0.36	
Bulk Modulus	1.1429E+11	Pa
Shear Modulus	3.5294E+10	Pa
Tensile Yield Strength	9.3E+08	Pa
Compressive Yield Strength	9.3E+08	Pa
Tensile Ultimate Strength	1.07E+09	Pa
Compressive Ultimate Strength	0	Pa

Figure 4. The mechanical properties of the titanium alloy.

Properties of Outline Row 5: TPU		
A	B	C
Property	Value	Unit
Density	1450	kg m ⁻³
Isotropic Elasticity		
Derive from	Young's Modulus and Poisson's...	
Young's Modulus	2.58	GPa
Poisson's Ratio	0.3897	
Bulk Modulus	3.8985E+09	Pa
Shear Modulus	9.2826E+08	Pa
Tensile Yield Strength	63.6	MPa
Tensile Ultimate Strength	64.5	MPa

Figure 5. The mechanical properties of the thermoplastic polyurethane (TPU).

Properties of Outline Row 3: Carbon Fiber (230 GPa)		
A	B	C
Property	Value	Unit
Density	1800	kg m ⁻³
Orthotropic Elasticity		
Young's Modulus X direction	2.3E+11	Pa
Young's Modulus Y direction	2.3E+10	Pa
Young's Modulus Z direction	2.3E+10	Pa
Poisson's Ratio XY	0.2	
Poisson's Ratio YZ	0.4	
Poisson's Ratio XZ	0.2	
Shear Modulus XY	9E+09	Pa
Shear Modulus YZ	8.2143E+09	Pa
Shear Modulus XZ	9E+09	Pa

Figure 6. The mechanical properties of the carbon fiber.

The classic structures (Fig. 7) of the Tripterion manipulator were modeled with the flexure hinges with circular contour and the Butterfly flexure hinges using the SOLIDWORKS software package [9]. To compare

the two structures of the classic Tripteron, a computer simulation was performed using the ANSYS software package [10]. The first stage of the simulation involved determining the error percentage of the end effector of the classic structures by moving prismatic actuator responsible for the x-axis by 1 mm. This was done under the condition of rigid fixation of the prismatic actuators responsible for y and z axes.

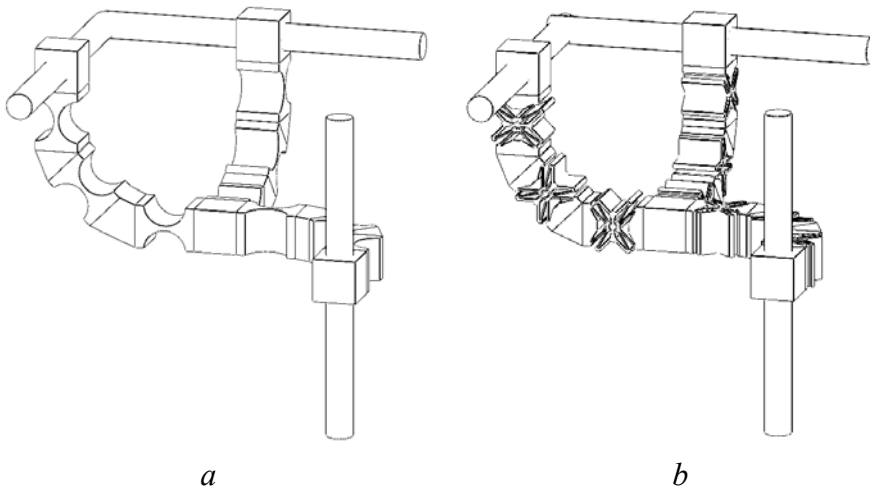


Figure 7. The classic structures of the Tripteron manipulator.
a) Classic structure with flexure hinges with circular contour.
b) Classic structure with “Butterfly” flexure hinges.

3. Simulation of micromanipulators

As in previous works [2, 3], the simulation results clearly indicate that the displacement of the end effector is not purely translational. Specifically, the end effector of the “a” structure showed a displacement of 0.45 mm for titanium alloy and 0.46 mm for TPU, which represent only 45% and 46%, respectively, of their desired displacements. (Fig. 8). The same simulation was implemented for the “b” structure with following results: 0.41 mm for

both titanium alloy and TPU, which represent only 41% of desired displacement (Fig. 9).

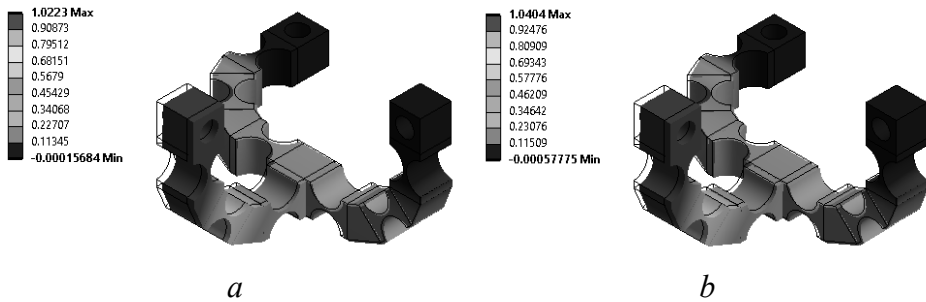


Figure 8. The simulation of the “a” structure of the classic Tripteron manipulator
a) titanium alloy; b) TPU.

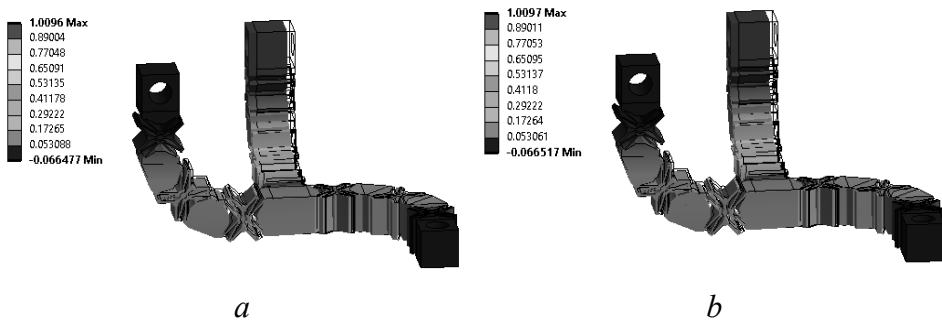


Figure 9. The simulation of the “b” structure of the classic Tripteron manipulator
a) titanium alloy; b) TPU.

Afterwards, to minimize the effects of rotational motion and improve the accuracy, additional legs added symmetrically for each leg, resulting in six PRRR legs. The novel structures (Fig. 10) of the Tripteron manipulator were modeled with the flexure hinges with circular contour and the Butterfly flexure hinges.

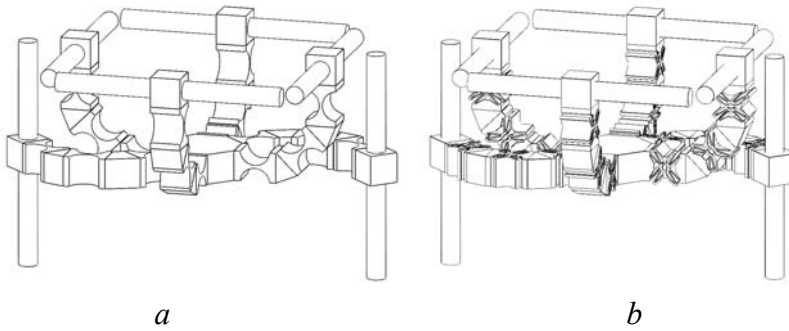


Figure 10. The novel structures of the Tripteron manipulator.
 a) Novel structure with flexure hinges with circular contour.
 b) Novel structure with “Butterfly” flexure hinges.

The second stage of the simulation involved determining the error percentage of the end effector of the novel structures, again by moving prismatic actuators responsible for the x-axis by 1 mm. This also was done under the condition of rigid fixation of the prismatic actuators responsible for y and z axes. In result, the end effector of the novel “a” structure showed a displacement of 0.78 mm for titanium alloy and 0.79 mm for TPU, which represent already 78% and 79%, respectively, of their desired displacements. (Fig. 11). The same simulation was implemented for the novel “b” structure with following results: 0.64 mm for both titanium alloy and TPU, which represent 64% of desired displacement (Fig. 12).

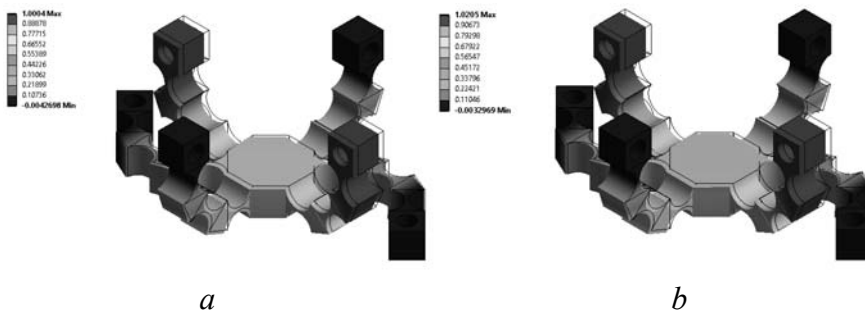


Figure 11. The simulation of the “a” structure of the classic Tripteron manipulator.
 a) titanium alloy b) TPU.

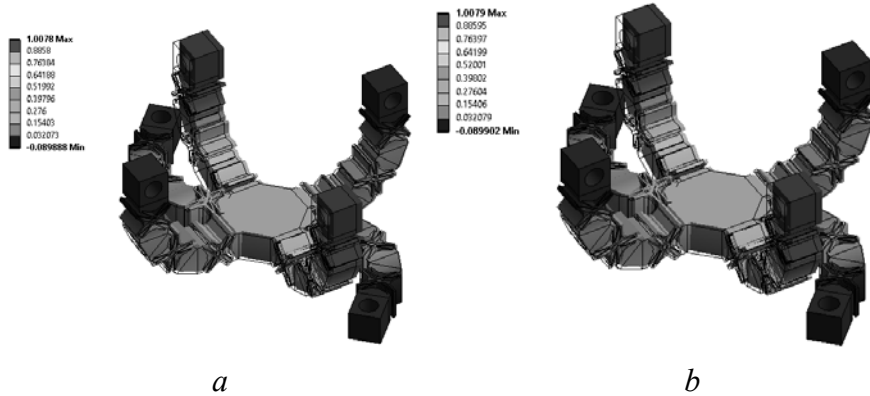


Figure 12. The simulation of the “b” structure of the classic Tripterion manipulator.
a) titanium alloy b) TPU.

4. Conclusion

In conclusion, a novel design for a Tripterion-inspired micromanipulator with flexure hinges has been proposed in this paper to improve accuracy. The classic Tripterion manipulator with flexure hinges has been shown to have accuracy issues, particularly with the replacement of traditional joints with flexure hinges, which can cause inaccuracies of end effector motion due to the stiffness of the hinges.

To address this issue, additional legs has been added symmetrically for each leg, resulting in six PRRR legs and providing clear translational motions. This new design minimizes the effects of rotational motion and improves accuracy. Finite element analysis was performed using ANSYS to validate the effectiveness of the new design, and the simulations demonstrated the new design's ability to achieve precise and accurate manipulation tasks.

The design was compared with the classic Tripterion manipulator using two different designs of flexure hinges and two different materials, titanium alloy and thermoplastic polyurethane (TPU), for potential use in

the manipulator. The simulation results showed that the displacement of the end effector was not purely translational in the classic Tripteron manipulator, with only 45–46% and 41% of desired displacement achieved for the two different designs, respectively. In contrast, the proposed design achieved 78–79% and 64% of desired displacement for the two different designs, respectively.

Overall, the presented design provides a solution to the accuracy issue in traditional Tripteron manipulators with flexure hinges and can be applied in various micromanipulation tasks. The design and component selection for a Tripteron manipulator are critical for its successful operation, and the proposed design and validation using ANSYS provide a useful framework for future research in this field.

REFERENCES

1. *Kostadinov K., Chakarov D., Shulev A., Tiankov T.* A Robot for Cell Injection, *International Journal of Intelligent Mechatronics and Robotics*, 2013, 3 (3). PP. 77–98.
2. *Gosselin C.* Compact dynamic models for the tripteron and quadruplex parallel manipulators, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* 2009, 223:1.
3. *Xie Y., Li Y., Cheung Ch.* Design and modeling of a novel tripteron-inspired triaxial parallel compliant manipulator with compact structure; *Micromachines*, 13 (5), 678.
4. *Zhao Y.* Position and force analysis of a 3-dof parallel translational mechanism, thesis, University of Florida, 2020.
5. *Quenouelle C., Gosselin C.* Kinemastatic modeling of compliant parallel mechanisms: Application to a 3-PRRR Mechanism, the Tripteron; *Meccanica*, 46 (1). PP. 155–169.
6. *Linß S., Schorr Ph., Zentner L.* General design equations for the rotational stiffness, maximal angular deflection and rotational precision of various notch flexure hinges, *Mechanical Sciences*. 8, 2017. PP. 29–49.
7. *Henein S., et. al.* Flexure Pivot for Aerospace Mechanisms, *Proceedings of the 10th ESMATS, ESA SP-524*, 2003.

8. Galoyan H. Design modification, experimental and finite element analysis of “butterfly” flexure pivot, Proceedings of National Polytechnic University of Armenia: Mechanics, Machine Science, Machine-Building, 2020, N1, PP. 28–32.
9. <https://www.solidworks.com/>
10. <https://www.ansys.com/>

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НОВОГО МИКРОМАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ, НА ОСНОВЕ МЕХАНИЗМА ТРИПТЕРОН

Г. Галоян

Кафедра Механики и машиноведения НПУА

АННОТАЦИЯ

Данная статья предлагает новую структуру микроманипулятора с упругими шарнирами, на основе механизма Триптерон, чтобы решить проблему точности, которая может пострадать, когда традиционные шарниры заменяются упругими шарнирами. Классический манипулятор Триптерон с упругими шарнирами имеет проблемы с точностью, особенно при замене традиционных шарниров, что может приводить к неточностям движения рабочего органа. Рабочий орган традиционного манипулятора Триптерон с упругими шарнирами производит вращательные движения вместо четких трансляционных движений из-за жесткости упругих шарниров.

Новый дизайн предлагает добавление дополнительных ног симметрично для каждой ноги, что приводит к шести ногам и обеспечивает четкие трансляционные движения. Предложенный дизайн значительно улучшает проблему нежелательных вращательных движений рабочего органа.

Для проверки эффективности нового дизайна был выполнен анализ методом конечных элементов с использованием программы ANSYS. Анализ показал, что уровни напряжения и деформации находятся в пределах приемлемых значений для используемого материала, а симуляции продемонстрировали способность нового дизайна выполнять точные и аккуратные задачи манипулирования.

Ключевые слова: Триптерон, микроманипулятор, метод конечных элементов, упругий шарнир.

DOI 10.48200/1829-0450_pmn_2023_1_65
УДК 512.532.20

Поступила: 08.06.2023г.
Сдана на рецензию: 09.06.2023г.
Подписана к печати: 13.06.2023г.

О СВОБОДНЫХ ПОЛУГРУППАХ ВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

М.Р. Карпетян

Российско-Армянский (Славянский) университет

marina.karapetyan@rau.am

АННОТАЦИЯ

В данной статье мы построили свободную полугруппу автоморфизмов свободных периодических групп $B(m, n)$ достаточно большого периода n с $m \geq 3$ порождающими.

Ключевые слова: свободная бернсайдова группа, группа автоморфизмов, свободная полугруппа.

Введение

Е.А.Черепанов в [1] показал, что группа автоморфизмов свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 10^{10}$ с $m \geq 2$ порождающими содержит полугруппу, изоморфную свободной полугруппе ранга 2. В [2, 3] были построены другие автоморфизмы бесконечного порядка и свободный моноид-ранга 2 в группе автоморфизмов группы $B(2, n)$ для любого нечетного периода $n \geq 665$. В настоящей работе показано, что аналогичного результата можно достичь более легкими рассуждениями, увеличив количество m свободных порождающих группы $B(m, n)$.

Рассмотрим свободную группу Бернсайда $B(3, n)$ с образующими $\{a, b, c\}$. Определим автоморфизмы на образующих следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) &= bca^3 & \varphi_1(b) &= bca^2 & \varphi_1(c) &= b, \\ \varphi_2(a) &= ac(ab)^3 & \varphi_2(b) &= ac(ab)^2 & \varphi_2(c) &= a. \end{aligned}$$

Теорема. Для любого нечетного $n \geq 665$ автоморфизмы φ_1 и φ_2 составляют базис свободной полугруппы ранга 2 в группе автоморфизмов $Aut(B(3, n))$.

Вспомогательные обозначения и леммы

Введем следующие обозначения:

\bar{X} – слово X , записанное на окружности, $\partial(X)$ – длина слова X , последовательное выполнение автоморфизмов $\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k}$ обозначим через последовательность i_1, i_2, \dots, i_k , состоящую из 1 и 2, то есть $\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_k} = \varphi_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. Для краткости обозначим последовательность i_1, i_2, \dots, i_k через P , то есть для любого слова $\omega \in B(m, n)$ $\varphi_P(\omega) = \varphi_{i_k} \left(\dots \left(\varphi_{i_2} \left(\varphi_{i_1}(\omega) \right) \right) \right)$. Если $P = i_1, i_2, \dots, i_k$, то обозначим $P' = i_2, \dots, i_k$ так что $P = i_1, P' = i_1, i_2, P''$ и т.д. Также обозначим $U_P = \varphi_P(a)$, $V_P = \varphi_P(b)$, $W_P = \varphi_P(c)$, $U_{P''} = K$, $V_{P''} = L$, $W_{P''} = M$, Z – некоторое простое слово.

$$U_{1P'} = V_{P'}W_{P'}U_{P'}U_{P'}U_{P'}, \quad V_{1P'} = V_{P'}W_{P'}U_{P'}U_{P'}, \quad W_{1P'} = V_{P'} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U_{2P'} &= U_{P'}W_{P'}U_{P'}V_{P'}U_{P'}V_{P'}U_{P'}V_{P'}, & V_{2P'} &= U_{P'}W_{P'}U_{P'}V_{P'}U_{P'}V_{P'}, \\ W_{2P'} &= U_{P'} \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя (1) и (2), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}\partial(V_P) &< \partial(U_P) < \frac{7}{5}\partial(V_P), & 4\partial(W_P) &< \partial(U_P) < 8\partial(W_P), \\ 3\partial(W_P) &< \partial(V_P) < 6\partial(W_P). \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial(W_P) < \partial(V_P) < \partial(U_P) < 323\partial(W_{P''})$.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Для любой последовательности P из 1 и 2, U_P, V_P, W_P – простые слова.

Доказательство: Доказательство проведем индукцией по длине последовательности P . Обозначим $\partial(P) = l$. Для $l = 1$ лемма верна, поскольку $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ – простые слова.

Пусть $U_{11P''} = \underline{LMKKL}LMKKKLMKKKLMKKK = Z^k$, $k \geq 2$.

Циклически сдвинув начало $LMKKL$ в конец слова $U_{11P''}$, получим $U'_{11P''} = (LMKKK)^3LMKKL = Z_1^k$, где Z_1 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z . Так как выполняется неравенство $\partial((LMKKK)^2LMKKL) \geq \partial(Z_1)$, значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $LMKKK = Z_1^p$,

- если $p = 1$, то $LMKKK = Z_1$ но $U'_{11P''} = Z_1^3LMKKL$, $\partial(LMKKL) < \partial(Z_1)$ и $U'_{11P''}$ – не целая степень.
- если $p \geq 2$, то заметим, что $LMKKK = U_{1P''}$.

Значит, допущение неверно, и $U'_{11P''}$ – простое слово.

Аналогично доказывается, что $V_{11P''}$ – простое слово, допуская что $V_{11P''} = \underline{LMKKL}LMKKKLMKKK = Z^k$, $V'_{11P''} = (LMKKK)^2LMKKL = Z_1^k$.

Поскольку $W_{11P''} = V_{1P''}$, значит, по индукционному предположению $W_{11P''}$ – тоже простое слово.

Пусть $U_{12P''} = \underline{KMKLK}KMKLKLMKLKLMKLKLMKLKLMKLK = Z^k$, $k \geq 2$.

Циклически сдвинув начало $KMKLK$ в конец слова $U_{12P''}$, получим $U'_{12P''} = (KMKLK)^3KMKLK = Z_1^k$, где Z_1 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z . Так как выполняется неравенство $\partial((KMKLK)^2KMKLK) \geq \partial(Z_1)$, значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $KMKLK = Z_1^p$,

- если $p = 1$, то $KMKLKLKL = Z_1$ но $U'_{12p''} = Z_1^3 KMKLKLK$, $\partial(KMKLKLK) < \partial(Z_1)$ и $U'_{12p''}$ – не целая степень.
- если $p \geq 2$, то заметим, что $KMKLKLKL = U_{2p''}$.

Значит, допущение неверно, и $U'_{12p''}$ – простое слово.

Аналогично доказывается, что $V_{12p''}$ – простое слово, допуская что

$$V_{12p''} = \underbrace{KMKLKLK}_{k \geq 2} KMKLKLKLKMKLKLKL = Z^k, \quad k \geq 2,$$

$$V'_{12p''} = (KMKLKLKL)^2 KMKLKLK = Z_1^k.$$

Поскольку $W_{12p''} = V_{2p''}$, значит, по индукционному предположению $W_{12p''}$ – тоже простое слово.

Пусть

$$U_{21p''} = \underbrace{LMKKKL}_{k \geq 2} LMKKKLMKKKLMKKKLMKKKLMKKKLMKK = Z^k, \quad k \geq 2.$$

Циклически сдвинув начало $LMKKKL$ в конец слова $U_{21p''}$, получим $U'_{21p''} = (LMKKKLMKK)^3 LMKKKL = Z_1^k$, где Z_1 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z . Так как выполняется неравенство $\partial((LMKKKLMKK)^2 LMKKKL) \geq \partial(Z_1)$, значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $LMKKKLMKK = Z_1^p$,

- если $p = 1$, то $LMKKKLMKK = Z_1$ но $U'_{21p''} = Z_1^3 LMKKKL$, $\partial(LMKKKL) < \partial(Z_1)$ и $U'_{21p''}$ – не целая степень.
- если $p \geq 2$, то обозначим $x = \underbrace{LMKK}_{k \geq 2} KLMKK$, циклически сдвинув начало $LMKK$ в конец слова x и записав в обратном порядке, получим $x_1 = K_1 K_1 M_1 L_1 K_1 K_1 M_1 L_1 K_1 = (K_1 K_1 M_1 L_1)^2 K_1 = Z_2^p$, $p \geq 2$, где Z_2 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z_1 . Так как выполняется неравенство $\partial((K_1 K_1 M_1 L_1) K_1) \geq \partial(Z_2)$, значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $K_1 K_1 M_1 L_1 = Z_2^r$
- если $r = 1$, то $K_1 K_1 M_1 L_1 = Z_2$ но $x_1 = (K_1 K_1 M_1 L_1)^2 K_1 = Z_2^2 K_1$, $\partial(K_1) < \partial(Z_2)$ и $x_1 = K_1 K_1 M_1 L_1 K_1 K_1 M_1 L_1 K_1$ – не целая степень.

- если $r \geq 2$, заметим, что $K_1 K_1 M_1 L_1$ есть $V_{1P''}$, записанное в обратном порядке.

Значит, допущение неверно, и $U'_{21P''}$ – простое слово.

Аналогично доказывается, что $V_{21P''}$ – простое слово, допуская что

$$V_{21P''} = \underline{LMK KKL} LMK KKL MKK LMK KKL MKK = Z^k, \quad k \geq 2,$$

$$V'_{21P''} = (LMK KKL MKK)^2 LMK KKL = Z_1^k.$$

Поскольку $W_{21P''} = U_{1P''}$, значит, по индукционному предположению $W_{21P''}$ – простое слово.

Пусть

$$U_{22P''} = \underline{KMKLK LK LK} KMKLK LK LK MKLKLK MKLKLK LK LK MKLKLK MKLKLK$$

$$LKLK MKLKL = Z^k, \quad k \geq 2.$$

Циклически сдвинув начало $KMKLK LK LK$ в конец слова $U_{22P''}$, получим $U'_{22P''} = (KMKLK LK LK MKLKL)^3 KMKLK LK LK = Z_1^k$, где Z_1 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z .

Так как выполняется неравенство

$$\partial((KMKLK LK LK MKLKL)^2 KMKLK LK LK) \geq \partial(Z_1),$$

значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что

$$KMKLK LK LK MKLKL = Z_1^p.$$

- если $p = 1$, то $KMKLK LK LK MKLKL = Z_1$ но $U'_{22P''} = Z_1^3 KMKLK LK LK$, $\partial(KMKLK LK LK) < \partial(Z_1)$ и $U'_{22P''}$ – не целая степень.
- если $p \geq 2$, то обозначим $x = \underline{KMKLK LK LK MKLKL}$, циклически сдвинув начало $KMKLK LK LK$ в конец слова x и записав в обратном порядке, получим $x_1 = L_1 K_1 L_1 K_1 M_1 K_1 L_1 K_1 L_1 K_1 M_1 K_1 L_1 K_1 = (L_1 K_1 L_1 K_1 M_1 K_1)^2 L_1 K_1 = Z_2^p$, $p \geq 2$. Так как выполняется неравенство $\partial((L_1 K_1 L_1 K_1 M_1 K_1) L_1 K_1) \geq \partial(Z_2)$, значит, применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $L_1 K_1 L_1 K_1 M_1 K_1 = Z_2^r$

- если $r = 1$, то $L_1K_1L_1K_1M_1K_1 = Z_2$ но $x_1 = (L_1K_1L_1K_1M_1K_1)^2L_1K_1 = Z_2^2L_1K_1$ $\partial(L_1K_1) < \partial(Z_2)$ и $x_1 = L_1K_1L_1K_1M_1K_1L_1K_1L_1K_1M_1K_1L_1K_1$ – не целая степень.
- если $r \geq 2$, $L_1K_1L_1K_1M_1K_1$ есть $V_{2P''}$, записанное в обратном порядке.

Значит, допущение неверно, и $U'_{22P''}$ – простое слово.

Аналогично доказывается, что $V_{22P''}$ – простое слово, допуская, что

$$V_{22P''} = \underbrace{KMKLK_LK_LK_L}_{k \geq 2} KMKLK_LK_LK_L KMKLK_LK_LK_L KMKLK_LK_LK_L = Z^k,$$

$$V'_{22P''} = (KMKLK_LK_LK_LK_L)^2 KMKLK_LK_LK_L = Z_1^k.$$

Поскольку $W_{22P''} = U_{2P''}$, значит, по индукционному предположению $W_{22P''}$ – простое слово.

Лемма 2. Для любой последовательности P из 1 и 2, если $\overline{U_P}$, $\overline{V_P}$, $\overline{W_P}$ содержат Z^k (Z –простое слово), то $k < 323$.

Доказательство: Доказательство проведем индукцией по длине P . Обозначим $\partial(P) = l$. Для $l = 1$ лемма верна. Допустим, что лемма верна для длин, меньших l и докажем для l . Пусть $\overline{U_P}$ или $\overline{V_P}$ или $\overline{W_P}$ содержат Z^k и $k \geq 323$. В силу индукционного предположения Z^{323} не может содержаться в \overline{LMKKK} и в $\overline{KMKLK_LK_LK_L}$ и в их подсловах. Следовательно, Z^{323} не содержится в подсловах слов $\overline{U_P}$, $\overline{V_P}$, $\overline{W_P}$ длины 5. Значит, Z^{323} может содержаться только в подслове длины не менее 6 в алфавите $\{K, L, M\}$. Значит, Z^{323} содержит в себе, как минимум, 4 буквы из алфавита $\{K, L, M\}$. Точнее, Z^{323} содержит KK или LL или MM , с учетом того, что K начинается с L , а L начинается с M . В этом случае $\partial(Z) < \partial(M) < \partial(L) < \partial(K)$. Значит, $KK = Z_1^r Z_1'$ или $LL = Z_1^r Z_1'$ или $MM = Z_1^r Z_1'$, где Z_1 – некоторый циклический сдвиг простого слова Z , $r \geq 2$. Применив лемму 1.2.3 [4], получим, что $K = Z_1^p$ или $L = Z_1^p$ или $M = Z_1^p$.

- при $p = 1$ получим, что $K = Z_1$ или $L = Z_1$ или $M = Z_1$, что противоречит, что $\partial(Z) < \partial(M) < \partial(L) < \partial(K)$
- при $p > 1$ получим, что $K = Z_1^p$ или $L = Z_1^p$ или $M = Z_1^p$, что противоречит лемме 1.

Лемма 3. Для любого $x \in F(a, b, c)$ $\varphi_{P_1}(x) = \varphi_{P_2}(x)$ тогда и только тогда, когда $P_1 = P_2$, где P_1 и P_2 любые последовательности из 1 и 2.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине P_1 .

Если $\partial(P_1) = \partial(P_2) = 1$, то $\varphi_{P_1}(x) \neq \varphi_{P_2}(x)$, поскольку $\varphi_1(x) = b \dots$, $\varphi_2(x) = a \dots$.

Если $\partial(P_1) = 1$ и $\partial(P_2) > 1$ то $\varphi_{P_1}(x) \neq \varphi_{P_2}(x)$, поскольку длина слова $\varphi_{P_2}(x)$ будет больше чем длина слова $\varphi_{P_1}(x)$.

Пусть $P_1 = T_1 i_k$, $P_2 = T_2 j_t$ и $\varphi_{P_1}(x) = \varphi_{P_2}(x)$,

то есть $\varphi_{T_1 i_k}(x) = \varphi_{T_2 j_t}(x)$.

- Если $i_k = j_t$, то

$$\varphi_{P_1}(x) = \varphi_{T_1 i_k}(x) = \varphi_{i_k}(\varphi_{T_1}(x))$$

$$\varphi_{P_2}(x) = \varphi_{T_2 j_t}(x) = \varphi_{j_t}(\varphi_{T_2}(x))$$

так как $\varphi_{P_1}(x) = \varphi_{P_2}(x)$, то $\varphi_{i_k}(\varphi_{T_1}(x)) = \varphi_{j_t}(\varphi_{T_2}(x))$.

Откуда непосредственно следует, что $\varphi_{T_1}(x) = \varphi_{T_2}(x)$. Но $\partial(T_1) < \partial(P_1)$, значит, для T_1 лемма верна. То есть $\varphi_{T_1}(x) = \varphi_{T_2}(x) \Leftrightarrow T_1 = T_2$ и $i_k = j_t$ значит $P_1 = P_2$.

- Если $i_k \neq j_t$, то так как для любого x , не равного пустому слову в $F(a, b, c)$ $\varphi_1(x) = b \dots$, $\varphi_2(x) = a \dots$. Значит, $\varphi_{i_k}(\varphi_{T_1}(x)) \neq \varphi_{j_t}(\varphi_{T_2}(x))$.

Доказательство теоремы

Вернемся к доказательству теоремы. В $Aut(B(3, n)) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ – свободная полугруппа тогда и только тогда, когда $\forall P_1, P_2 \quad \varphi_{P_1} =$

$\varphi_{P_2} \Leftrightarrow P_1 = P_2$. Докажем от противного: пусть $\varphi_{P_1} = \varphi_{P_2}$, но $P_1 \neq P_2$. По лемме 3 $\forall x \in F(a, b, c) P_1 \neq P_2 \Rightarrow \varphi_{P_1}(x) \neq \varphi_{P_2}(x)$ в $F(a, b, c)$.

В частности, $\varphi_{P_1}(a) \neq \varphi_{P_2}(a) \mid * (\varphi_{P_2}(a))^{-1}$.

Получим $\varphi_{P_1}(a) (\varphi_{P_2}(a))^{-1}$ не равно пустому слову в $F(a, b, c)$.

По лемме 2, слово $\varphi_{P_1}(a) (\varphi_{P_2}(a))^{-1}$ не содержит Z^{646} . Согласно лемме 5.5, из [5], равное единице в $B(3, n)$ слово должно содержать Z^{1000} .

Следовательно, $\varphi_{P_1}(a) (\varphi_{P_2}(a))^{-1}$ не равно пустому слову в $B(3, n)$. Значит, $\varphi_{P_1}(a) \neq \varphi_{P_2}(a)$ в $B(3, n)$, что противоречит предположению.

Из доказанной теоремы непосредственно следуют аналогичные утверждения для $\text{Aut}(B(m, n))$, $m \geq 4$, если определим автоморфизмы $\overline{\varphi}_1$ и $\overline{\varphi}_2$ групп $B(m, n)$ следующим образом: $\overline{\varphi}_1(a_1) = \varphi_1(a_1)$, $\overline{\varphi}_1(a_2) = \varphi_1(a_2)$, $\overline{\varphi}_1(a_3) = \varphi_1(a_3)$, $\overline{\varphi}_1(a_i) = id(a_i)$, $4 \leq i \leq m$, $\overline{\varphi}_2(a_1) = \varphi_2(a_1)$, $\overline{\varphi}_2(a_2) = \varphi_2(a_2)$, $\overline{\varphi}_2(a_3) = \varphi_2(a_3)$, $\overline{\varphi}_2(a_i) = id(a_i)$, $4 \leq i \leq m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cherepanov E. Communications in Algebra, 2005, v. 33, № 2. PP. 539–547.
2. Pahlevanyan A. Infinite order Automorphisms of Free Periodic Groups of Sufficiently Large Exponent. Proceedings of the YSU A: Physical and Mathematical Sciences, 2009, 43 (2 (219)), 38–42.
3. Пайлеванян А.С., Ростами Х.Р. Об автоморфизмах и вложениях свободных периодических групп // «Известия НАН Армении». Математика. Т. 46, н. 2, 2011. СС. 59–70.
4. Адян С.И. Проблема Бересайда и тождества в группах. М.: «Наука», 1975.
5. Ольшанский А.Ю. О теореме Новикова-Адяна, 1982 // Матем. сб., 118 (160):2 (6). СС. 203–235.

**ON FREE SUBGROUP OF AUTOMORPHISMS
OF FREE PERIODIC GROUPS**

M. Karapetyan

Russian-Armenian (Slavonic) University

ABSTRACT

In this paper, we construct free semigroup of infinite order automorphisms of free periodic groups $B(m, n)$ of sufficiently large period n with $m \geq 3$ generators.

Keywords: free Burnside group, automorphisms group, free semigroup.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Акопян А.Р.** аспирант второго года обучения по направлению подготовки «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей» РАУ
- Арамян Э.Р.** аспирантка второго года обучения по направлению подготовки «Методы и системы защиты информации, информационной безопасности» РАУ
- Галоян Г.А.** аспирант третьего года обучения кафедры механики и машиноведения НПУА
- Карамян Д.С.** аспирант второго года обучения по направлению подготовки «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей» РАУ
- Кроян А.К.** преподаватель кафедры высшей математики, физики и прикладной механики НАУА
- Манукян А.А.** магистрант второго курса факультета информатики и прикладной математики ЕГУ
- Микаелян Г.В.** магистрант второго курса факультета информатики и прикладной математики ЕГУ
- Карапетян М.Р.** преподаватель кафедры математической кибернетики РАУ

Главный редактор РНИ – М.Э. Авакян
Корректор – А.С. Есаян
Компьютерная верстка – А.Г. Антонян

Editor-in-Chief of the RNI – M.E. Avakyan
Proofreader – A.S. Yesayan
Computer layout – A.G. Antonyan

Адрес Редакции научных изданий
Российско-Армянского университета:
0051, г. Ереван, ул. Овсена Эмина, 123
тел./факс: (+374 12) 77-57-75 (внутр. 8130)
e-mail maria.avakian@rau.am

Address of the Editorial Board of Scientific Publications
of the Russian-Armenian University:
0051, Yerevan, st. Hovsep Emin, 123
tel./fax: (+374 12) 77-57-75 (ext. 8130)
e-mail: maria.avakian@rau.am

Заказ № 1

Подписано к печати 06.06.2023г.
Формат 70x100¹/₁₆. Бумага офсетная № 1.
Объем 4.75 усл. п.л. Тираж 100 экз.

Order No. 1

Signed for publication on June 06, 2023
Format 70x100¹/₁₆. Offset paper No. 1.
Volume 4.75 conv. p.l. Circulation 100 copies